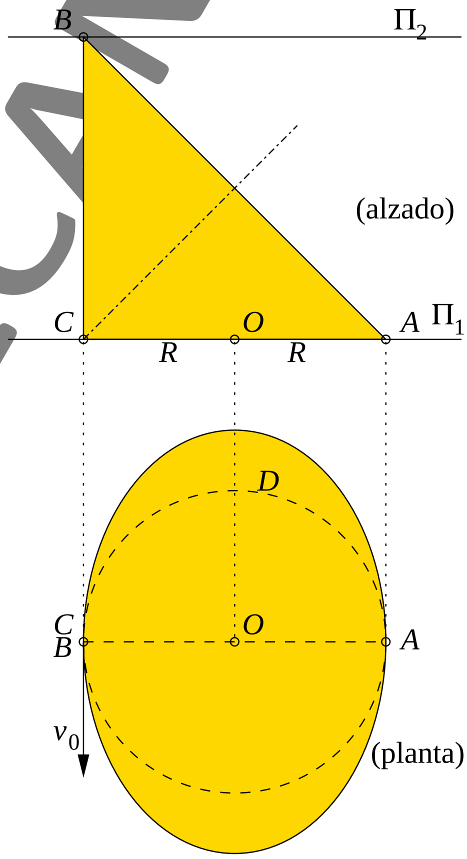
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (8 de septiembre de 2003)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Un cono de revolución y ángulo $\angle ACB = \pi/2$ se mueve con su generatriz inferior de contacto CA apoyada en un plano fijo Π_1 sobre el cual rueda y desliza, de forma que los puntos de contacto C y A permanecen en todo momento sobre una circunferencia D fija del plano y de radio R que describen en el movimiento, sabiéndose que la velocidad del vértice C del cono es constante e igual a v_0. A su vez el cono se halla en contacto con otro plano paralelo fijo Π_2 en el punto B, rodando sin deslizar en este contacto. Se pide:



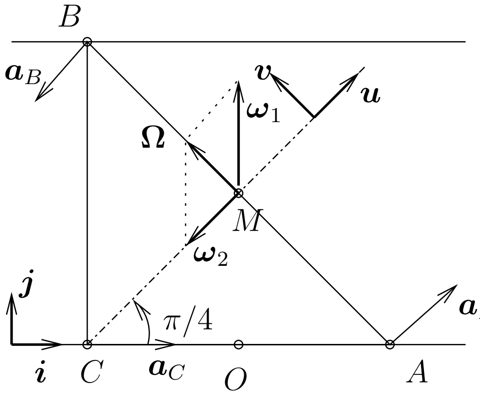
1. Velocidad angular del cono, y componentes de rodadura y pivotamiento de la misma. Discutir si el movimiento se reduce a una rotación o no. ¿Qué figuras geométricas genera el eje helicoidal del movimiento a lo largo del mismo (axoides)?

2. Aceleración angular del cono y aceleración de los puntos (materiales) del cono A, B y C.

⋆

1.— El eje de revolución del cono se encuentra en todo instante en un plano vertical que contiene a la generatriz CA de contacto con el plano Π_1 y al punto B de contacto con el plano Π_2. Dicho plano gira en torno a un eje vertical que pasa por O con velocidad $\omega_1 = v_0/R$. Queda perfectamente determinado el movimiento del eje de revolución del cono y de este modo de una recta material del sólido. El movimiento de rotación del sólido queda, por tanto, definido a falta de una rotación ω_2 en torno a dicha recta.

El punto M, centro de la base del cono (ver figura), se encuentra en todo instante en el eje de rotación del plano citado por lo que su velocidad es nula. De este modo, el movimiento se reduce a una rotación. La velocidad angular del sólido $\boldsymbol{\Omega}$ tiene la dirección $\boldsymbol{MB}$ dado que B es un punto cuya velocidad es también nula. En consecuencia, el punto A que pertenece al eje de rotación tiene asimismo velocidad nula, por lo en ese punto el cono rueda sin deslizar sobre Π_1. Por otra parte, el punto B describe en el movimiento también una circunferencia de radio R, en el plano Π_2.



Se define un sistema móvil que acompaña el movimiento del plano $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$, de forma que $\boldsymbol{i}$ tiene la dirección de la generatriz $\boldsymbol{CA}$ y $\boldsymbol{j}$ coincide con la vertical. Sea $\boldsymbol{u}$ un vector según la dirección del eje de revolución y $\boldsymbol{v}$ un vector ortogonal contenido en el plano vertical. La velocidad angular se expresa:

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega_1\boldsymbol{j} - \omega_2\boldsymbol{u}.$$

La condición de rodadura sin deslizamiento del punto B permite calcular el valor de ω_2:

$$\boldsymbol{v}_B = (\omega_1 R - \omega_2 R\sqrt{2})\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{\omega_1}{\sqrt{2}} = \frac{v_0}{R\sqrt{2}}.$$

En consecuencia, la velocidad de rotación resulta

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega} = \frac{v_0}{R}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{j}\right) = \frac{v_0}{R\sqrt{2}}\boldsymbol{v} = \frac{v_0}{2R}(\boldsymbol{j} - \boldsymbol{i}).}$$

Las velocidades de pivotamiento $\boldsymbol{\Omega}_P$ y rodadura $\boldsymbol{\Omega}_R$ con respecto al plano Π_1 resultan:

$$\boldsymbol{\Omega}_P = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{j})\boldsymbol{j} = \frac{v_0}{2R}\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{\Omega}_R = \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_P = -\frac{v_0}{2R}\boldsymbol{i}.$$

Se puede comprobar que el axoide fijo es un cono de revolución de vértice M, eje vertical y semiángulo $\pi/4$, mientras que el axoide móvil coincide con el plano de la base del cono.

2.— El vector $\boldsymbol{\Omega}$ se mantiene constante en módulo y gira alrededor del eje vertical con velocidad angular $\omega_1\,\boldsymbol{j}$, por lo que la aceleración angular es

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \omega_1\,\boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{\Omega} = \frac{v_0^2}{2R^2}\boldsymbol{k}.$$

Teniendo en cuenta que M es un punto fijo del movimiento y por tanto su velocidad y aceleración son nulas, podemos calcular la aceleración de los demás puntos:

$$\boldsymbol{a}_A = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{r}_{MA} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \underbrace{\boldsymbol{v}_A}_{=\boldsymbol{0}} = \frac{v_0^2}{R\sqrt{2}}\boldsymbol{u} = \frac{v_0^2}{2R}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j});$$

$$\boldsymbol{a}_B = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{r}_{MB} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \underbrace{\boldsymbol{v}_B}_{=\boldsymbol{0}} = -\frac{v_0^2}{R\sqrt{2}}\boldsymbol{u} = -\frac{v_0^2}{2R}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j});$$

$$\boldsymbol{a}_C = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{r}_{MC} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_C = \frac{v_0^2}{R}\boldsymbol{i}.$$