Mecánica

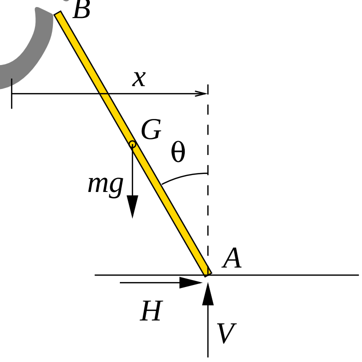
EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (8 de septiembre de 2003)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 7,5/45) Tiempo: 45 min.

Responder a la siguiente cuestión teórico-práctica *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Expresar la ecuación que refleja el principio del momento cinético (ecuación de balance), respecto del centro de masas (CDM) de un sistema general. *Obtener* asimismo la expresión correspondiente para un punto arbitrario, que no sea fijo ni coincida con el CDM. Como aplicación, *desarrollar* las ecuaciones anteriores para la dinámica de una barra AB de masa m y longitud ℓ que evoluciona dentro de un plano vertical, con el extremo A apoyado sobre una guía recta horizontal sobre la que puede deslizar, cuyas reacciones sobre la barra son H y V, *estableciendo* las ecuaciones de balance de momento cinético en su centro G y en el extremo A y *comprobando* la equivalencia entre ambas.



El principio del momento cinético enuncia que la derivada del momento cinético respecto del centro de masa (G) de un sistema cualquiera es igual al momento de las fuerzas exteriores en ese mismo punto:

$$\boldsymbol{M}_G = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_G}{\mathrm{d}t}, \tag{1}$$

siendo $\boldsymbol{M}_G = \sum_{i=1}^N (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_G)\wedge \boldsymbol{f}_i$, $\boldsymbol{H}_G = \sum_{i=1}^N (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_G)\wedge m_i\boldsymbol{v}_i$.

Si se toman momentos respecto de un punto cualquiera A, los momentos se relacionan mediante $\boldsymbol{H}_A = \boldsymbol{H}_G + \boldsymbol{r}_{AG}\wedge M\boldsymbol{v}_G$ y $\boldsymbol{M}_A = \boldsymbol{M}_G + \boldsymbol{r}_{AG}\wedge \boldsymbol{F}$, siendo $\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{f}_i$. Si se deriva $\boldsymbol{H}_A$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_A &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{H}_G + \boldsymbol{r}_{AG}\wedge M\boldsymbol{v}_G) = \boldsymbol{M}_G + \boldsymbol{r}_{AG}\wedge M\boldsymbol{a}_G + (\boldsymbol{v}_G - \boldsymbol{v}_A)\wedge M\boldsymbol{v}_G \\ &= \boldsymbol{M}_G + \boldsymbol{r}_{AG}\wedge \boldsymbol{F} - \boldsymbol{v}_A\wedge M\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{M}_A - \boldsymbol{v}_A\wedge M\boldsymbol{v}_G\end{aligned} \tag{2}$$

Comprobamos por tanto que si se desea aplicar el principio del momento cinético en un punto A cualquiera debe añadirse un término complementario a la derivada del momento cinético, $\boldsymbol{v}_A\wedge M\boldsymbol{v}_G$. Este término se anula si el punto A tiene velocidad nula o bien si coincide con G.

En el ejemplo propuesto la ecuación de balance, tomando momentos en G, es:

$$H\frac{\ell}{2}\cos\theta + V\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{12}m\ell^2\ddot{\theta}. \tag{3}$$

Intervienen las reacciones H y V, que debemos obtenerlas mediante las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento:

$$H = m\ddot{x} - m\frac{\ell}{2}\ddot{\theta}\cos\theta + m\frac{\ell}{2}\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta; \quad V - mg = -m\frac{\ell}{2}\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta - m\frac{\ell}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta. \tag{4}$$

Eliminando las reacciones H y V de (4) en (3) se obtiene

$$m\frac{\ell}{2}\ddot{x}\cos\theta + mg\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta. = \frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta}. \tag{5}$$

Por otra parte, si se toman momentos en A no es necesario considerar las reacciones, aunque debe incluirse el término complementario según (2):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{12}m\ell^2\dot{\theta} + m\left(\frac{\ell^2}{4} - \frac{\ell}{2}\dot{x}\cos\theta\right)\right]\boldsymbol{k} = \left[\frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta} - m\frac{\ell}{2}\ddot{x}\cos\theta + m\frac{\ell}{2}\dot{x}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\right]\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{M}_A - \boldsymbol{v}_A \wedge M\boldsymbol{v}_G = \left[mg\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta + m\frac{\ell}{2}\dot{x}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\right]\boldsymbol{k};$$

Desarrollando la ecuación (2), se comprueba inmediatamente que se obtiene la misma ecuación que antes (5):

$$\frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta} - m\frac{\ell}{2}\ddot{x}\cos\theta = mg\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta.$$