Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

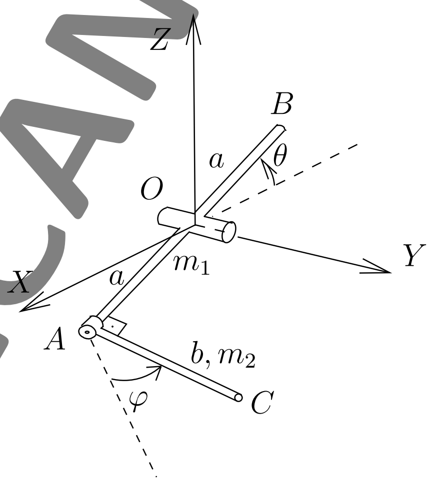
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (8 de septiembre de 2003)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 5.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

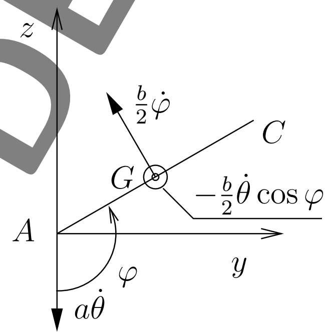
Un sistema mecánico se compone de dos varillas AB y AC (ver figura). La varilla AB, de longitud $2a$ y masa m_1, tiene su centro de masas articulado en el punto fijo O de forma que se mueve en todo momento contenida en el plano vertical fijo OXZ. Por otro lado la varilla AC, de masa m_2 y longitud b, se mantiene en todo momento perpendicular a la primera varilla AB mediante una articulación cilíndrica. Se pide:

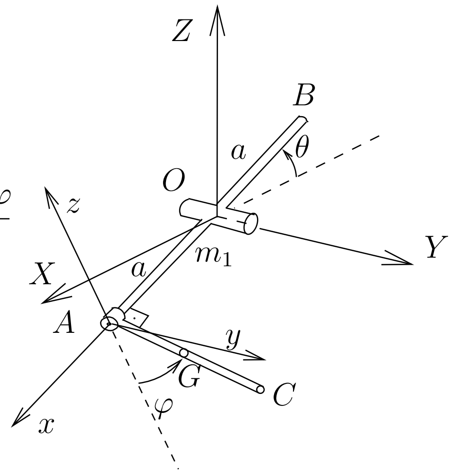


1. Expresión de las ecuaciones del movimiento en función de los grados de libertad del sistema y sus derivadas;
2. Discusión sobre la existencia de integrales primeras del movimiento;
3. Expresión de las fuerzas de reacción en el punto fijo O.

⋆

1.— Además de los ejes dibujados en el enunciado, consideraremos un triedro móvil con la varilla AB, $Oxyz$, de forma que coincida con el triedro fijo para la posición $\theta = 0$. En la figura se dibuja en verdadera magnitud la varilla AC en el plano móvil Ayz, con las distintas componentes de la velocidad. Sumando estas se obtiene la velocidad del centro de masas G de la varilla AC:





$$\boldsymbol{v}_G = -\frac{b}{2}\dot\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} - a\dot\theta\,\boldsymbol{k} + \frac{b}{2}\dot\varphi(\cos\varphi\,\boldsymbol{j} + \operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{k}) \quad (1)$$

$$v_G^2 = a^2\dot\theta^2 + \frac{b^2}{4}\dot\varphi^2 - ab\dot\theta\dot\varphi\operatorname{sen}\varphi + \frac{b^2}{4}\dot\theta^2\cos^2\varphi\ .$$

La energía cinética del sistema es

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m_1(2a)^2\right)\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m_2 v_G^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m_2 b^2\right)(\dot\varphi^2 + \dot\theta^2\cos^2\varphi),$$

y la energía potencial

$$V = -m_2 g\left(a\operatorname{sen}\theta + \frac{b}{2}\cos\varphi\cos\theta\right),$$

con lo que la Lagrangiana resulta:

$$L = T - V = \left(\frac{1}{6}m_1a^2 + \frac{1}{2}m_2a^2 + \frac{1}{6}m_2b^2\cos^2\varphi\right)\dot\theta^2 + \frac{1}{6}m_2b^2\dot\varphi^2$$
$$- \frac{1}{2}m_2ab\dot\theta\dot\varphi\operatorname{sen}\varphi + m_2g\left(a\operatorname{sen}\theta + \frac{b}{2}\cos\varphi\cos\theta\right). \quad (2)$$

Derivando se obtienen las ecuaciones de Lagrange:

$$\left(\frac{1}{3}m_1a^2 + m_2a^2 + \frac{1}{3}m_2b^2\cos^2\varphi\right)\ddot\theta - \frac{1}{2}m_2ab\ddot\varphi\operatorname{sen}\varphi$$
$$- \frac{2}{3}m_2ab\dot\theta\dot\varphi\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi - \frac{1}{2}m_2ab\dot\varphi^2\cos\varphi - m_2g\left(a\cos\theta - \frac{b}{2}\cos\varphi\operatorname{sen}\theta\right) = 0,$$

$$-\frac{1}{2}m_2ab\ddot\theta\operatorname{sen}\varphi + \frac{1}{3}m_2b^2\ddot\varphi + \frac{1}{3}m_2b^2\dot\theta^2\operatorname{sen}\varphi\cos\theta + m_2g\frac{b}{2}\operatorname{sen}\varphi\cos\theta = 0\ .$$

2.— Ninguna de las coordenadas consideradas es cíclica. Al ser el sistema conservativo, la energía total es constante:

$$E = T + V = \left(\frac{1}{6}m_1a^2 + \frac{1}{2}m_2a^2 + \frac{1}{6}m_2b^2\cos^2\varphi\right)\dot\theta^2 + \frac{1}{6}m_2b^2\dot\varphi^2$$
$$- \frac{1}{2}m_2ab\dot\theta\dot\varphi\operatorname{sen}\varphi - m_2g\left(a\operatorname{sen}\theta + \frac{b}{2}\cos\varphi\cos\theta\right).$$

3.— En el punto O hay 3 reacciones (R_x, R_y, R_z) así como un par reactivo que obliga a que la rótula cilíndrica mantenga su dirección. El enunciado nos pide únicamente las reacciones. Para obtenerlas basta con desarrollar la expresión

$$R_x\boldsymbol{i} + R_y\boldsymbol{j} + R_z\boldsymbol{k} = m_1g\boldsymbol{K} + m_2g\boldsymbol{K} + m_2\boldsymbol{a}_G.$$

En función del triedro móvil, $\boldsymbol{K} = -\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{k}$. Por otra parte, la aceleración de G se puede obtener derivando la velocidad (1):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_G &= \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_G}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{rel}} + \dot\theta\,\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{v}_G \\ &= \left(-a\dot\theta^2 - \frac{b}{2}\ddot\theta\cos\varphi + b\dot\theta\dot\varphi\operatorname{sen}\varphi\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{b}{2}\ddot\varphi\cos\varphi - \frac{b}{2}\dot\varphi^2\operatorname{sen}\varphi\right)\boldsymbol{j} \\ &\quad + \left(-a\ddot\theta + \frac{b}{2}\ddot\varphi\operatorname{sen}\varphi + \frac{b}{2}\dot\varphi^2\cos\varphi + \frac{b}{2}\dot\theta^2\cos\varphi\right)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

(al ser el triedro móvil se ha incluido el término complementario de derivación). Con esto, se obtienen las reacciones:

$$R_x = -m_1g\operatorname{sen}\theta - m_2g\operatorname{sen}\theta + m_2\left(-a\dot\theta^2 - \frac{b}{2}\ddot\theta\cos\varphi + b\dot\theta\dot\varphi\operatorname{sen}\varphi\right);$$

$$R_y = m_2\left(\frac{b}{2}\ddot\varphi\cos\varphi - \frac{b}{2}\dot\varphi^2\operatorname{sen}\varphi\right);$$

$$R_z = m_1g\cos\theta + m_2g\cos\theta + m_2\left(-a\ddot\theta + \frac{b}{2}\ddot\varphi\operatorname{sen}\varphi + \frac{b}{2}\dot\varphi^2\cos\varphi + \frac{b}{2}\dot\theta^2\cos\varphi\right).$$