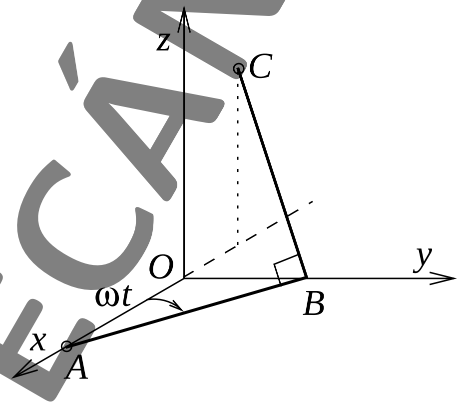
Mecánica

1.er EXAMEN PARCIAL (22 de noviembre 2003)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Una escuadra ABC está formada por dos varillas iguales de longitud a unidas rígidamente formando ángulo recto en B. Los puntos A y B están obligados a permanecer respectivamente sobre los ejes Ox y Oy, de manera que AB forma con el eje Ox un ángulo ωt en sentido horario, desarrollándose el movimiento en el intervalo $0 \leq \omega t < \pi/4$. Por su parte el extremo C se apoya constantemente en el plano Oxz. Se pide, para un instante genérico:



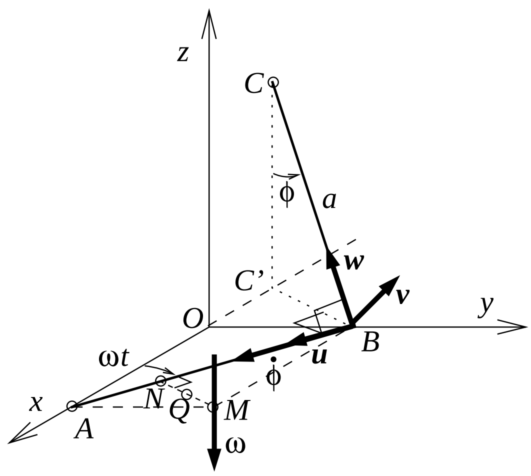
1. Velocidad angular de la escuadra definiendo sus componentes tanto en ejes fijos como en ejes móviles ligados a la escuadra.

2. Velocidad del punto C.

3. Razonar si el movimiento equivale a una rotación instantánea y definir el eje del movimiento helicoidal tangente.

1.— Denominando C' a la proyección de C sobre el plano Oxy, comprobamos que el plano del triángulo $CC'B$ es perpendicular a AB, por lo que $\angle ABC' = \pi/2$ y $\overline{BC'} = a \operatorname{tg} \omega t$. Denominando $\phi = \angle C'CB$, se verifica

$$a \operatorname{sen} \phi = a \operatorname{tg} \omega t \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} \phi = \operatorname{tg} \omega t\ . \tag{1}$$



El movimiento de la escuadra se compone de una rotación de velocidad angular $(-\omega)$ del segmento AB alrededor del eje Mz, y de una rotación $\dot{\phi}$ alrededor de BA, por lo que

$$\boldsymbol{\Omega} = -\omega\, \boldsymbol{k} + \dot{\phi}\, \boldsymbol{u}.$$

En la expresión anterior hemos empleado el versor $\boldsymbol{u}$ según la dirección BA, que pertenece al triedro móvil ligado a la escuadra $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ (ver figura). La relación entre ambos triedros es:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \cos(\omega t)\boldsymbol{i} - \operatorname{sen}(\omega t)\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{v} &= \cos\phi \operatorname{sen}(\omega t)\boldsymbol{i} + \cos\phi\cos(\omega t)\boldsymbol{j} + \operatorname{sen}\phi\, \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{w} &= -\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}(\omega t)\boldsymbol{i} - \operatorname{sen}\phi\cos(\omega t)\boldsymbol{j} + \cos\phi\, \boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{2}$$

El valor de $\dot{\phi}$ se puede obtener derivando (1),

$$\dot{\phi}\cos\phi = \omega(1 + \operatorname{tg}^2 \omega t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = \omega\frac{1 + \operatorname{tg}^2(\omega t)}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2(\omega t)}} = \omega\frac{1/\cos^2(\omega t)}{\sqrt{2 - 1/\cos^2(\omega t)}}. \tag{3}$$

Las expresiones de la velocidad angular en los triedros fijo y móvil son por tanto:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot\phi\cos(\omega t)\boldsymbol{i} - \dot\phi\,\mathrm{sen}(\omega t)\boldsymbol{j} - \omega\,\boldsymbol{k} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \omega_x = \omega\cos(\omega t)\dfrac{1+\mathrm{tg}^2(\omega t)}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2(\omega t)}} \\ \omega_y = -\omega\,\mathrm{sen}(\omega t)\dfrac{1+\mathrm{tg}^2(\omega t)}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2(\omega t)}} \\ \omega_z = -\omega \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot\phi\,\boldsymbol{u} - \omega\,\mathrm{sen}\,\phi\,\boldsymbol{v} - \omega\cos\phi\,\boldsymbol{w} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \omega_u = \omega\dfrac{1+\mathrm{tg}^2(\omega t)}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2(\omega t)}} \\ \omega_v = -\omega\,\mathrm{tg}(\omega t) \\ \omega_w = -\omega\sqrt{1-\mathrm{tg}^2(\omega t)} \end{cases}$$

Otro camino para obtener $\dot\phi$ podría haber sido partir de la expresión de la velocidad de C,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{r}_{BC} &= a\omega\cos(\omega t)\boldsymbol{j} + (-\omega\,\boldsymbol{k} + \dot\phi\,\boldsymbol{u})\wedge a\boldsymbol{w} \\ &= a\omega\cos(\omega t)\boldsymbol{j} - a\omega\,\mathrm{sen}\,\phi\,\boldsymbol{u} - a\dot\phi\,\boldsymbol{v}, \end{aligned} \tag{4}$$

y obligando a que la velocidad de C normal al plano Oxz se anule:

$$0 = \boldsymbol{v}_C\cdot\boldsymbol{j} = a\omega\cos(\omega t) + a\omega\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}(\omega t) - a\dot\phi\cos\phi\cos(\omega t)\dot\phi \;\Rightarrow\; \dot\phi = \omega\frac{\cos(\omega t) + \mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}(\omega t)}{\cos\phi\cos(\omega t)}\ .$$

La expresión obtenida es equivalente a (3) como es fácil comprobar.

2.— Desarrollamos la expresión de la velocidad antes obtenida (4), pasándola al triedro fijo mediante (2):

$$\boldsymbol{v}_C = -[a\omega\,\mathrm{sen}\,\phi\cos(\omega t) + a\dot\phi\cos\phi\,\mathrm{sen}(\omega t)]\boldsymbol{i} - a\dot\phi\,\mathrm{sen}\,\phi\,\boldsymbol{k}.$$

Eliminando $(\phi, \dot\phi)$ mediante las expresiones (1), (3) resulta

$$\boldsymbol{v}_C = -a\omega\,\mathrm{sen}(\omega t)[2+\mathrm{tg}^2(\omega t)]\boldsymbol{i} - a\omega\frac{1+\mathrm{tg}^2(\omega t)}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2(\omega t)}}\,\mathrm{tg}(\omega t)\boldsymbol{k}.$$

(Otro camino para obtener este mismo resultado sería derivar las expresiones de las coordenadas del punto C en el triedro fijo: $x_C = -a\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}(\omega t);\ y_C = 0;\ z_C = a\cos\phi.$)

3.— El movimiento es una composición de dos rotaciones ortogonales cuyos ejes se cruzan sin cortarse, $-\omega\boldsymbol{k}$ por M y $\dot\phi\boldsymbol{u}$ por B (ver figura). Por tanto el movimiento resultante *no equivale a una rotación*, sino que el campo de velocidades es el de un movimiento helicoidal general. Podemos comprobarlo evaluando la velocidad mínima o de deslizamiento,

$$v_{\mathrm{desl}} = \boldsymbol{v}_B\cdot\frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega} = -\frac{a\omega\dot\phi\,\mathrm{sen}(\omega t)\cos(\omega t)}{\sqrt{\omega^2+\dot\phi^2}},$$

que no se anula salvo en el instante inicial ($t=0$). El eje helicoidal tangente corta al segmento MN de mínima distancia entre los dos ejes de rotación por un determinado punto Q. Este puede obtenerse mediante aplicación de la fórmula general,

$$\boldsymbol{r}_{NQ} = \frac{\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{v}_N}{\Omega^2} = \frac{(-\omega\boldsymbol{k}+\dot\phi\boldsymbol{u})\wedge(-\overline{MN}\omega\boldsymbol{u})}{\omega^2+\dot\phi^2} = \frac{\omega^2}{\dot\phi^2+\omega^2}\overbrace{a\,\mathrm{sen}(\omega t)\cos(\omega t)}^{\overline{MN}}\,\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{u}.$$