Mecánica

1.$^{\text{er}}$ EXAMEN PARCIAL (22 de noviembre 2003)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Sea un oscilador lineal con un grado de libertad, de masa m, constante elástica k y coeficiente de amortiguamiento viscoso c (subcrítico). Suponiendo que sobre la masa m actúa una fuerza externa $f(t)$ general, plantear las ecuaciones del sistema y *discutir* el movimiento resultante, diferenciando los distintos términos de la respuesta y su significado. ¿en qué se diferencia el movimiento para dos casos que sólo difieran en las *condiciones iniciales*? ¿cuál es el significado del denominado *régimen permanente*? Como *aplicación*, resolver el movimiento que resulta cuando la fuerza es una función lineal $f(t) = at$, con las condiciones iniciales $\{x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0\}$. (5 ptos.)

Las fuerzas debidas al resorte y al amortiguador son $f_k = -kx,\ f_c = -c\dot{x}$. La ecuación diferencial del movimiento se obtiene a partir de la 2.ª ley de Newton y resulta:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \tag{1}$$

La solución general de esta ecuación se expresa como suma de dos términos: la solución general de la ecuación homogénea $x_h(t)$ más una solución particular de la ecuación completa $x_p(t)$: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$. Al decir en el enunciado que el amortiguamiento c es subcrítico, la solución de la homogénea corresponde a un movimiento oscilatorio amortiguado:

$$x_h(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}\left(A\operatorname{sen}(\omega t) + B\cos(\omega t)\right) \tag{2}$$

siendo $\omega = \sqrt{-(c/2m)^2 + k/m}$, y A y B constantes de integración que se obtendrán con las condiciones iniciales. El término $x_p(t)$ depende de la expresión de la fuerza $f(t)$ y es independiente de las condiciones iniciales. El término $x_h(t)$, al ir multiplicado por una exponencial decreciente, desaparece en términos prácticos al cabo de un cierto tiempo. El intervalo durante el que no se puede despreciar el término $x_h(t)$ frente a $x_p(t)$ se llama *régimen transitorio.* El régimen permanente es el que se alcanza cuando el término $x_h(t)$ se amortigua hasta hacerse despreciable, quedando tan solo $x_p(t)$. Como éste se puede escoger de forma que no dependa de las condiciones iniciales, éstas sólo tendran influencia en el régimen transitorio.

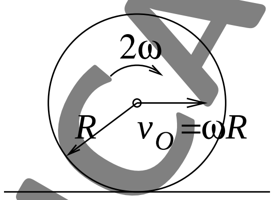
Aplicación: Probando como solución particular un polinomio de grado 1 en t (al igual que $f(t)$): $x_p(t) = Mt + N$, al sustituir x_p en la ecuación diferencial resulta:

$$cM + k(Mt + N) = at,\ \forall t \quad \Rightarrow \quad kM = a,\ cM + kN = 0 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{a}{k},\ N = -\frac{ca}{k^2}\ . \tag{3}$$

Por tanto $x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}(A\operatorname{sen}(\omega t) + B\cos(\omega t)) + at/k - ca/k^2$. Las constantes A y B se sacan a partir de las condiciones iniciales:

$$0 = x(0) = B - \frac{ca}{k^2} \qquad \Rightarrow \qquad B = \frac{ca}{k^2} \tag{4}$$

$$0 = \dot{x}(0) = -\frac{c}{2m}B + A\omega + \frac{a}{k} \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{1}{\omega}\left(\frac{c}{2m}B - \frac{a}{k}\right) = \frac{a}{k\omega}\left(\frac{c^2}{2km} - 1\right) \tag{5}$$



Se considera un movimiento plano de un sistema rígido. *Deducir* el valor de la aceleración del punto material que coincide en un instante dado con el centro instantáneo de rotación (CIR), expresando dicha aceleración como función de la velocidad del punto geométrico que coincide con el CIR (velocidad de sucesión). Como *aplicación*, calcular dicha aceleración en el caso de un disco circular de radio R que se mueve en contacto con una recta fija, siendo su velocidad angular 2ω (constante) y la velocidad lineal de su centro ωR. (5 ptos.)

Considerando el movimiento plano como una rotación instántanea alrededor del centro instantáneo de rotación (I), la velocidad de un punto cualquiera P del sólido se expresa como:

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_I) \ , \tag{6}$$

siendo $\boldsymbol{r}_P$ el vector de posición del punto material P y $\boldsymbol{r}_I$ el vector de posición de I, que es un punto geométrico (es decir, I coincidirá a lo largo del movimiento con distintos puntos del sólido).

Derivando (6) respecto del tiempo resulta:

$$\boldsymbol{a}_P = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge (\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_I) + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\dot{\boldsymbol{r}}_P - \dot{\boldsymbol{r}}_I) \tag{7}$$

Si ahora particularizamos (7) para el caso en que el punto P coincide con el punto material del sólido I^* que se encuentra en un instante dado en la posición del punto geométrico I, resulta:

$$\boldsymbol{a}_{I^*} = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge (\boldsymbol{r}_{I^*} - \boldsymbol{r}_I) + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\dot{\boldsymbol{r}}_{I^*} - \dot{\boldsymbol{r}}_I) \ . \tag{8}$$

Teniendo en cuenta en (8) que $\boldsymbol{r}_{I^*} = \boldsymbol{r}_I$, $\dot{\boldsymbol{r}}_{I^*} = 0$ y llamando $\boldsymbol{v}_C = \dot{\boldsymbol{r}}_I$ a la velocidad de sucesión del CIR, resulta finalmente la expresión pedida:

$$\boldsymbol{a}_{I^*} = -\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_C \ . \tag{9}$$

Aplicación: Como la velocidad angular del disco es 2ω y la velocidad de O es ωR en la dirección de la recta fija, el CIR del disco se encuentra en todo momento debajo de O y a una distancia $R/2$. Por tanto, la velocidad de sucesión del CIR es la misma que la del centro del disco O.

Tomando unos ejes tal que $\boldsymbol{i}$ es paralelo a la recta fija y sentido positivo en el del movimiento, y $\boldsymbol{k}$ perpendicular al plano en el que se desarrolla el movimiento y sentido positivo hacia afuera del papel, la ecuación (9) se expresa en este caso:

$$\boldsymbol{a}_{I^*} = -(-2\omega\boldsymbol{k}) \wedge (\omega R\boldsymbol{i}) = 2\omega^2 R\,\boldsymbol{j} \tag{10}$$

(según la dirección vertical ascendente).