ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS (MADRID)

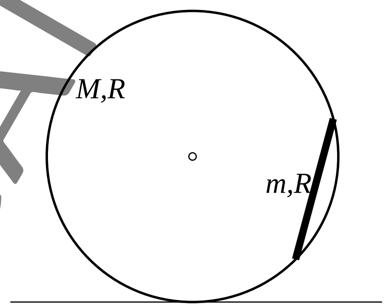
Mecánica

2.º EXAMEN PARCIAL (20 de enero de 2004)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

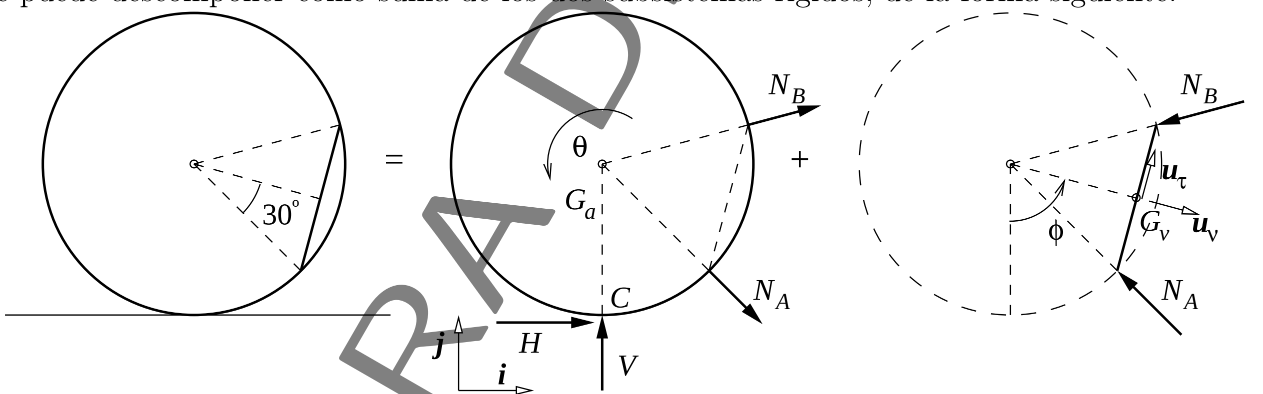
Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Un aro de masa M y radio R, rueda sin deslizar sobre una recta horizontal, manteniéndose constantemente en un plano vertical. Sobre él desliza sin rozamiento una varilla homogénea de masa m y longitud R, manteniendo sus extremos sobre el aro con una ligadura bilateral y que no estorba para la rodadura. Se pide:



1. Calcular las reacciones de la recta sobre el aro y del aro sobre la varilla, expresándolas en función únicamente de los grados de libertad y sus derivadas.
2. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema en función únicamente de los grados de libertad y sus derivadas, sin que en ellas aparezcan las reacciones.
3. Obtener la reacción tangencial de la recta sobre el aro (fuerza de rozamiento) empleando multiplicadores de Lagrange y comprobar que da el mismo resultado del apartado primero.

1.— El conjunto está formado por dos sólidos, el aro y la varilla. Denominamos (H, V) las reacciones de la base sobre el aro, y (N_A, N_B) las reacciones del aro sobre la varilla. El sistema se puede descomponer como suma de los dos subsistemas rígidos, de la forma siguiente:



Se toma como grados de libertad del sistema el giro θ del aro, y el de la varilla alrededor del centro del aro ϕ, ambos respecto de una referencia absoluta y antihorarios. La aceleración del centro de masa G_v de la varilla es

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_{G_v} &= -R\ddot{\theta}\,\boldsymbol{i} + a\ddot{\phi}\,\boldsymbol{u}_\tau - a\dot{\phi}^2\,\boldsymbol{u}_\nu \\ &= (a\ddot{\phi}\cos\phi - a\dot{\phi}^2\operatorname{sen}\phi - R\ddot{\theta})\boldsymbol{i} + (a\ddot{\phi}\operatorname{sen}\phi + a\dot{\phi}^2\cos\phi)\boldsymbol{j}\ , \end{aligned} \tag{1}$$

donde llamamos $a = R\sqrt{3}/2$. Así podemos plantear las siguientes ecuaciones:

$$\sum F_x \text{ (conjunto)}: \qquad H = -MR\ddot{\theta} - mR\ddot{\theta} + ma\ddot{\phi}\cos\phi - ma\dot{\phi}^2\operatorname{sen}\phi\ ; \tag{2}$$

$$\sum F_y \text{ (conjunto)}: \qquad V - (M+m)g = ma\ddot{\phi}\operatorname{sen}\phi + ma\dot{\phi}^2\cos\phi\ ; \tag{3}$$

$$\sum M_{G_a} \text{ (aro)}: \qquad HR = MR^2\ddot{\theta}\ . \tag{4}$$

Análogamente, para la varilla podemos plantear:

$$\sum M_{G_v} \text{ (varilla)}: \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{R}{2}(-N_A + N_B) = \frac{1}{12}mR^2\ddot{\phi}; \tag{5}$$

$$\sum F_x \text{ (varilla)}: \quad -N_A \operatorname{sen}(\phi - \frac{\pi}{6}) - N_B \operatorname{sen}(\phi + \frac{\pi}{6}) = m(-R\ddot{\theta} + a\ddot{\phi}\cos\phi - a\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\phi); \tag{6}$$

$$\sum F_y \text{ (varilla)}: \quad N_A \cos(\phi - \frac{\pi}{6}) + N_B \cos(\phi + \frac{\pi}{6}) = mg + m(a\ddot{\phi}\operatorname{sen}\phi + a\dot{\phi}^2\cos\phi). \tag{7}$$

las ecuaciones (4) y (3) permiten despejar inmediatamente H y V:

$$\begin{aligned} H &= MR\ddot{\theta}\ ; \\ V &= (M+m)g + ma\ddot{\phi}\operatorname{sen}\phi + ma\dot{\phi}^2\cos\phi\ ; \end{aligned} \tag{8}$$

De las ecuaciones (6) y (7) se despejan las reacciones sobre la varilla:

$$\begin{aligned} N_A &= mR\ddot{\theta}(-\cos\phi + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\phi) + ma(\ddot{\phi} + \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{\phi}^2) + mg(\operatorname{sen}\phi + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\phi)\ ; \\ N_B &= mR\ddot{\theta}(\cos\phi + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\phi) + ma(-\ddot{\phi} + \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{\phi}^2) + mg(-\operatorname{sen}\phi + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\phi)\ . \end{aligned} \tag{9}$$

2.— Eliminando H mediante $(8)_1$ en (2) resulta

$$-(2M+m)R\ddot{\theta} + ma\ddot{\phi}\cos\phi - ma\dot{\phi}^2\operatorname{sen}\phi = 0\ . \tag{10}$$

Por otra parte, eliminando (N_A, N_B) mediante $(9)_1$ y $(9)_2$ en (5),

$$-\frac{5\sqrt{3}}{9}mR\ddot{\phi} = -mR\ddot{\theta}\cos\phi + mg\operatorname{sen}\phi\ . \tag{11}$$

Las ecuaciones (10) y (11) definen la dinámica del sistema. De ellas se puede despejar $(\ddot{\theta}, \ddot{\phi})$:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -\frac{m\operatorname{sen}\phi}{2M + m(1 - \frac{9}{10}\cos^2\phi)}\left(\frac{9}{10}\frac{g}{R}\cos\phi + \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\phi}^2\right)\ ; \\ \ddot{\phi} &= \frac{9}{5\sqrt{3}}\frac{\operatorname{sen}\phi}{2M + m(1 - \frac{9}{10}\cos^2\phi)}\left(-(2M+m)\frac{g}{R} - m\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\phi}^2\cos\phi\right)\ . \end{aligned} \tag{12}$$

Eliminando $(\ddot{\theta}, \ddot{\phi})$ de las expresiones (8) y (9) obtendríamos las reacciones como funciones exclusivamente de las variables de estado, es decir de los grados de libertad y sus derivadas primeras $(\theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi})$.

3.— Formulamos la Lagrangiana con las coordenadas (no libres) (x, θ, ϕ):

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + a^2\dot{\phi}^2 + 2a\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}mR^2\dot{\phi}^2\right) + mga\cos\phi. \tag{13}$$

El sistema está sujeto a la ligadura

$$\dot{x} + R\dot{\theta};\ \delta x + R\delta\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 1,\ A_\theta = R. \tag{14}$$

La ecuación de Lagrange en x, introduciendo el multiplicador λ, es:

$$(M+m)\ddot{x} + ma(\ddot{\phi}\cos\phi - \dot{\phi}^2\operatorname{sen}\phi) = \lambda\ . \tag{15}$$

El multiplicador λ tiene el significado de la reacción tangencial pedida. Efectivamente, comprobamos que sustituyendo $\ddot{x} = -R\ddot{\theta}$ se obtiene (2) con $H = \lambda$.