Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

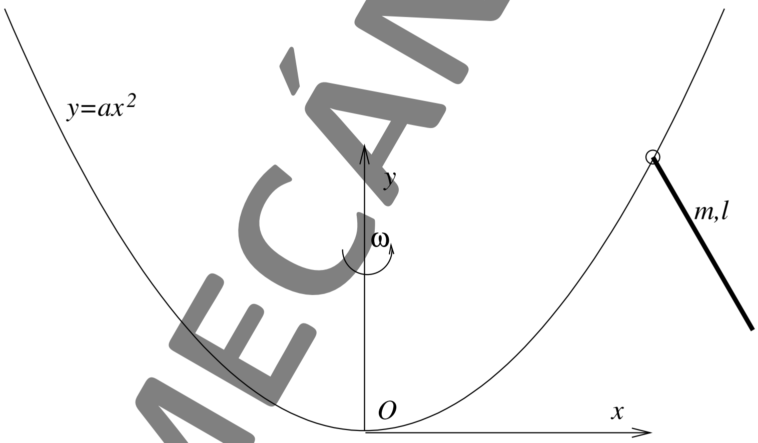
Mecánica

2.º EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTRAORDINARIO (20 de enero de 2004)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/30 ó 10/45) Tiempo: 60 min.

Una varilla delgada de masa m y longitud ℓ tiene un extremo ligado a una guía parabólica de ecuación $y = ax^2$, pudiendo deslizar libremente sobre la misma, así como girar permaneciendo dentro del plano de la parábola. A su vez, la guía parabólica tiene un movimiento impuesto de rotación alrededor del eje vertical fijo Oy con velocidad ω constante. Sobre la varilla actúa el campo gravitatorio simplificado. Se pide:



1. Expresión de las energías cinética y potencial de la varilla, en función de los grados de libertad escogidos.
2. Ecuaciones de la dinámica de la varilla.
3. Discutir la existencia de integrales primeras y su significado.

Nota: A efectos de obtener el movimiento de la varilla relativo al plano de la parábola, podrá sustituirse si se desea la rotación impuesta por una fuerza repulsiva dirigida desde el eje Oy a cada elemento de masa de la varilla, de magnitud el producto de la masa del elemento, la velocidad de rotación al cuadrado y la distancia del elemento al eje (fuerza centrífuga de inercia).

1.— Consideramos como coordenadas (libres) del sistema la abscisa x del extremo de la varilla unido a la parábola, y el ángulo θ que forma la varilla con la vertical. Plantearemos el problema en primer lugar como sugiere el enunciado en la nota, es decir estudiando el movimiento relativo al plano de la parábola e incluyendo el efecto de la rotación como una fuerza centrífuga.

La energía cinética (del movimiento relativo) es

$$T = T_r = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m\ell^2\right)\dot\theta^2 \ . \tag{1}$$

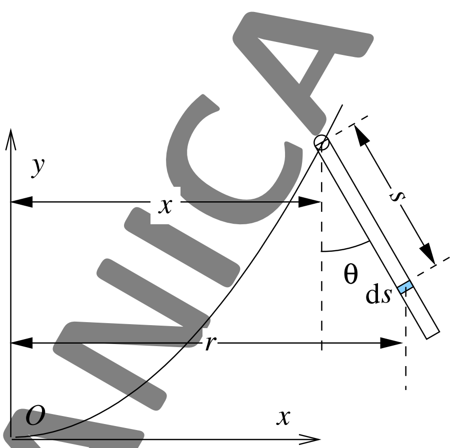
Desarrollando la expresión de v_G,

$$v_G^2 = \left(\dot x + \frac{\ell}{2}\dot\theta\cos\theta\right)^2 + \left(\dot y + \frac{\ell}{2}\dot\theta\operatorname{sen}\theta\right)^2 \ , \tag{2}$$

resulta

$$T = \frac{1}{2}m\dot x^2(1+4a^2x^2) + \frac{1}{2}m\ell\dot\theta\dot x(\cos\theta + 2ax\operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{6}m\ell^2\dot\theta^2 \ . \tag{3}$$

Por otra parte, la fuerza centrífuga depende sólo de la configuración relativa (x, θ) y proviene por tanto de un potencial que calcularemos. Para ello consideramos el potencial elemental $\mathrm{d}V_{\text{arr}}$ de un elemento de masa $\mathrm{d}m$, al tratarse de una fuerza repulsiva y proporcional a la distancia r del elemento al eje será $\mathrm{d}V_{\text{arr}} = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2\,\mathrm{d}m$. Para realizar la integral extendida a toda la varilla tomamos una coordenada auxiliar s ($s = 0$ en el extremo articulado de la varilla y $s = \ell$ en el extremo libre), por lo que $r(s) = x + s\operatorname{sen}\theta$. Denominando μ a la masa de la varilla por unidad de longitud, $\mathrm{d}m = \mu\,\mathrm{d}s$, por lo que



$$\begin{aligned} V_{\text{arr}} &= \int_0^\ell -\frac{\omega^2}{2}(x + s\operatorname{sen}\theta)^2\,\mu\mathrm{d}s = -\mu\frac{\omega^2}{2}\left[x^2\ell + \operatorname{sen}^2\theta\frac{\ell^3}{3} + x\operatorname{sen}\theta\,\ell^2\right] \\ &= -\frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + x\ell\operatorname{sen}\theta) - \frac{1}{2}m\omega^2\frac{\ell^2\operatorname{sen}^2\theta}{3}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

El potencial total será suma de este más el gravitatorio,

$$V = V_{\text{arr}} + V_g = -\frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + x\ell\operatorname{sen}\theta) - \frac{1}{2}m\omega^2\frac{\ell^2\operatorname{sen}^2\theta}{3} + mg\left(ax^2 - \frac{\ell}{2}\cos\theta\right)\,. \tag{5}$$

2.— La Lagrangiana se obtiene inmediatamente a partir de (3) y (5),

$$\begin{aligned} L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(1 + 4a^2x^2) + \frac{1}{2}m\ell\dot{\theta}\dot{x}(\cos\theta + 2ax\operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\theta}^2 \\ + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + x\ell\operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{2}m\omega^2\frac{\ell^2\operatorname{sen}^2\theta}{3} - mg\left(ax^2 - \frac{\ell}{2}\cos\theta\right)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Derivando se obtienen directamente las ecuaciones de Lagrange para la dinámica:

$$\begin{aligned} m(1 + 4a^2x^2)\ddot{x} + 4ma^2x\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\ell\ddot{\theta}(\cos\theta + 2ax\operatorname{sen}\theta) - \frac{1}{2}m\ell\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta + m\ell ax\dot{\theta}^2\cos\theta \\ - m\omega^2 x - \frac{1}{2}m\omega^2\ell\operatorname{sen}\theta + 2mgax = 0\,, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\ell\ddot{x}(\cos\theta + 2ax\operatorname{sen}\theta) + m\ell a\dot{x}^2\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta} \\ - \frac{1}{3}m\omega^2\ell^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{1}{2}m\omega^2x\ell\cos\theta + \frac{1}{2}mgl\operatorname{sen}\theta = 0\,. \end{aligned} \tag{8}$$

3.— En el sistema definido, teniendo en cuenta el potencial de la fuerza centrífuga, todas las fuerzas que trabajan son conservativas, y por tanto se conserva la energía mecánica, lo que constituye una integral primera, que a su vez coincide con la integral de Jacobi (la expresión de T es homogénea cuadrática en $\{\dot{x}, \dot{\theta}\}$):

$$\begin{aligned} E' = T_r + V_{\text{arr}} + V_g = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(1 + 4a^2x^2) + \frac{1}{2}m\ell\dot{\theta}\dot{x}(\cos\theta + 2ax\operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\theta}^2 \\ - \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + x\ell\operatorname{sen}\theta) - \frac{1}{2}m\omega^2\frac{\ell^2\operatorname{sen}^2\theta}{3} + mg\left(ax^2 - \frac{\ell}{2}\cos\theta\right)\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Sabemos que la expresión anterior no es en realidad la energía total del sistema, sino la suma de la energía cinética relativa, la potencial debida a las cargas reales, y la potencial debida a las fuerzas (ficticias) no inerciales. La energía total real no se conserva, ya que es necesario ejercer un trabajo sobre el sistema para mantener ω constante.

El procedimiento directo para resolver este problema consistiría en plantear las ecuaciones de Lagrange referidas al movimiento en el sistema inercial (fijo). La velocidad (absoluta) del centro de la varilla se obtiene agregando en la expresión (2) la componente perpendicular al plano,

$$v_G^2 = \left(\dot{x} + \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \left(2ax\dot{x} + \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\right)^2 + \omega^2\left(x + \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta\right)^2 .$$

Por otra parte, la velocidad de rotación en dirección transversal a la varilla es $\omega_t^2 = \dot{\theta}^2 + \omega^2\operatorname{sen}^2\theta$. (La rotación longitudinal $\omega_l = \omega\cos\theta$ según la propia varilla no genera energía cinética.) Así, la energía cinética resulta

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(1+4a^2x^2) + \frac{1}{2}m\ell\dot{\theta}\dot{x}(\cos\theta + 2ax\operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{6}m\ell^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2\operatorname{sen}^2\theta) \\ + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + x\ell\operatorname{sen}\theta) . \end{aligned} \tag{10}$$

Restando el potencial $V_g = mg\left(ax^2 - \frac{\ell}{2}\cos\theta\right)$, se obtiene la misma Lagrangiana anterior (6), y por tanto idénticas ecuaciones de Lagrange (7) y (8). La única diferencia se produce en el método de obtenerlas, lo que ahora procede de los términos homogéneos de la energía cinética antes se obtenía mediante el potencial de la fuerza centrífuga.

Como ya se ha dicho, la energía *real* en el sistema inercial no se conserva. Sin embargo, la Lagrangiana no depende de t explícitamente, por lo que la integral de Jacobi es una constante del movimiento:

$$\begin{aligned} h &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} - L \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2(1+4a^2x^2) + \frac{1}{2}m\ell\dot{\theta}\dot{x}(\cos\theta + 2ax\operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\theta}^2 \\ &\qquad - \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + x\ell\operatorname{sen}\theta) - \frac{1}{6}m\omega^2\ell^2\operatorname{sen}^2\theta + mg\left(ax^2 - \frac{\ell}{2}\cos\theta\right) . \end{aligned} \tag{11}$$

Esta expresión coincide con la obtenida antes (9). Era previsible, ya que puede demostrarse fácilmente que si se descompone T en los tres sumandos cuadrático, lineal y homogéneo $T = T_2 + T_1 + T_0$ la integral de Jacobi resulta $h = T_2 - T_0 + V$. Ahora bien, $T_r = T_2$ y $V_{\text{arr}} = -T_0$, por lo que ambas expresiones son idénticas.