Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

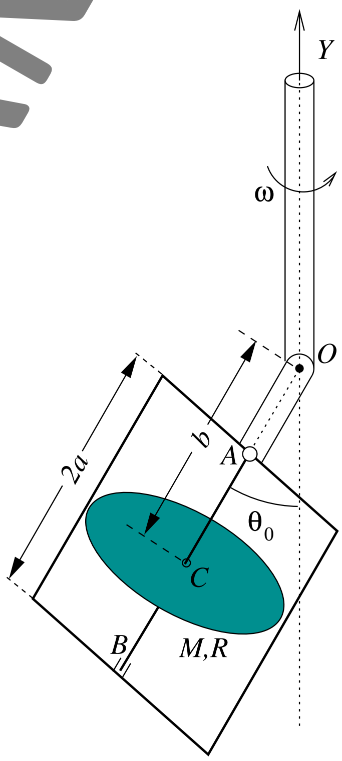
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (20 de enero de 2004)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Un giróscopo está formado por un disco circular de masa M y radio R normal a un eje AB de masa despreciable, montado sobre un bastidor en A y B con articulaciones sin rozamiento que permiten el giro libre. El bastidor se halla articulado en un punto O alineado con AB a un árbol vertical OY. A este árbol vertical se le comunica una velocidad de rotación impuesta de valor constante ω, que transmite al bastidor a través de la articulación cilíndrica. (Es decir, esta articulación cilíndrica obliga al eje OAB a moverse dentro del plano vertical móvil que contiene al eje OY y es normal al bulón que materializa el eje de la articulación, permitiendo tan sólo el giro libre dentro de dicho plano vertical.) Las distancias $\overline{AB}$ y $\overline{CO}$ valen $2a$ y b respectivamente. En el instante inicial el eje AB forma un ángulo θ_0 con la vertical descendente y no posee movimiento vertical, mientras que el giróscopo tiene una componente de la velocidad de rotación alrededor de su eje $\omega_{z,0}$.

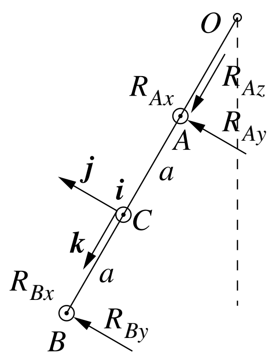


1. Demostrar que la componente de velocidad de rotación del giróscopo alrededor de su eje de revolución es constante.

2. Calcular las reacciones del bastidor sobre el giróscopo en los puntos A y B, expresándolas en función de los grados de libertad. Deberá considerarse que la articulación en B del giróscopo no restringe el movimiento en dirección axial (AB).

⋆

1.— Consideraremos un triedro móvil con origen en C de forma que el eje Cz lleve la dirección de AB, Cy perpendicular al anterior dentro del plano vertical que contiene a OAB, y Cx horizontal, saliendo hacia fuera del papel. El eje Cy coincide con un radio de máxima pendiente del disco, y el Cx con un radio horizontal. Este triedro es principal de inercia para el disco, el tensor de inercia es $\boldsymbol{I}_C = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$, con $A = MR^2/4$ y $C = MR^2/2$.



El triedro definido, al ser el eje Cx constantemente horizontal, sigue el movimiento del sólido salvo su rotación propia φ alrededor del eje Cz, constituyendo lo que se denomina el *triedro intermedio*. Puesto que el sólido tiene simetría de revolución alrededor del eje AB, este triedro será ventajoso para plantear las ecuaciones del movimiento de Euler, que se plantean como:

$$\boldsymbol{M}_C = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{I}_C \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{I}_C \cdot \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\Omega}\right]_{\mathrm{rel}} + \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{ref}} \cdot (\boldsymbol{I}_C \cdot \boldsymbol{\Omega}), \tag{1}$$

siendo $\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{ref}} = \boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi}\,\boldsymbol{k}$. Empleando el parámetro θ definido en el enunciado, las componentes de la velocidad de rotación son

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\Omega}\} &= (\omega_x,\, \omega_y,\, \omega_z)^{\mathrm{T}} = (-\dot{\theta},\, \omega \operatorname{sen}\theta,\, \dot{\varphi} - \omega\cos\theta)^{\mathrm{T}} \\ \{\boldsymbol{\Omega}\}_{\mathrm{ref}} &= (-\dot{\theta},\, \omega \operatorname{sen}\theta,\, -\omega\cos\theta)^{\mathrm{T}}\ . \end{aligned} \tag{2}$$

CÁTEDRA DE MECÁNICA

Desarrollando la componente según z de la ecuación vectorial (1) resulta

$$M_z = C\dot{\omega}_z \ . \tag{3}$$

Puesto que todas las fuerzas (reacciones en A y B y peso) se aplican en el eje Cz, el momento se anula ($M_z = 0$), y se deduce inmediatamente el resultado pedido

$$\omega_z = \omega_{z,0} \text{ (cte.)} \tag{4}$$

2.— Las otras dos ecuaciones de Euler que se deducen de (1) en direcciones x e y son

$$\begin{aligned} M_x &= A\dot{\omega}_x - (A - C)\omega_y\omega_z + A\dot{\varphi}\omega_y \ ; \\ M_y &= A\dot{\omega}_y - (C - A)\omega_z\omega_x - A\dot{\varphi}\omega_x \ . \end{aligned} \tag{5}$$

Denominamos a las reacciones (R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az}, R_{Bx}, R_{By}). (Tal como nos dicen, en B no se produce reacción según z.) El momento de las fuerzas en C es $M_x = a(R_{Ay} - R_{By})$, $M_y = a(R_{Bx} - R_{Ax})$. Desarrollando las ecuaciones (5) y teniendo en cuenta $C = 2A$ resulta

$$\begin{aligned} a(R_{Ay} - R_{By}) &= -A\ddot{\theta} + 2A\omega\omega_z \operatorname{sen}\theta + A\omega^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta \ ; \\ a(R_{Bx} - R_{Ax}) &= 2A(\omega_z + \omega\cos\theta)\dot{\theta} \ . \end{aligned} \tag{6}$$

Por otra parte, podemos expresar las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento. Para ello obtenemos la aceleración de C descomponiendo el movimiento en el arrastre (rotación ω) y el movimiento relativo (giro θ):

$$\boldsymbol{a}_C = \underbrace{-\omega^2 b \operatorname{sen}\theta(\cos\theta\,\boldsymbol{j} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{k})}_{\boldsymbol{a}_{\text{arr}}} + \underbrace{\ddot{\theta}b\,\boldsymbol{j} - \dot{\theta}^2 b\,\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{a}_{\text{rel}}} + \underbrace{2\omega b\dot{\theta}\cos\theta\,\boldsymbol{i}}_{\boldsymbol{a}_{\text{cor}}} \ . \tag{7}$$

De esta forma, se obtienen las ecuaciones

$$\begin{gathered} R_{Ax} + R_{Bx} = 2Mb\omega\dot{\theta}\cos\theta \ ; \\ R_{Ay} + R_{By} - Mg\operatorname{sen}\theta = M(-b\omega^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + b\ddot{\theta}) \ ; \\ R_{Az} + Mg\cos\theta = -M(b\omega^2\operatorname{sen}^2\theta + b\dot{\theta}^2) \ . \end{gathered} \tag{8}$$

Mediante las ecuaciones (6) y (8) se puede despejar las reacciones pedidas:

$$\begin{aligned} R_{Az} &= -Mg\cos\theta - M(b\omega^2\operatorname{sen}^2\theta + b\dot{\theta}^2) \ ; \\ R_{Ax} &= M\dot{\theta}\left[\left(-\frac{R^2}{4a} + b\right)\omega\cos\theta - \frac{R^2}{4a}\omega_z\right] \ ; \\ R_{Bx} &= M\dot{\theta}\left[\left(\frac{R^2}{4a} + b\right)\omega\cos\theta + \frac{R^2}{4a}\omega_z\right] \ ; \\ R_{Ay} &= -\frac{M}{2}\ddot{\theta}\left(\frac{R^2}{4a} - b\right) + Mg\operatorname{sen}\theta + \frac{M}{2}\omega^2\left(\frac{R^2}{4a} - b\right)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + M\frac{R^2}{4a}\omega\omega_z\operatorname{sen}\theta \ ; \\ R_{By} &= \frac{M}{2}\ddot{\theta}\left(\frac{R^2}{4a} + b\right) + Mg\operatorname{sen}\theta - \frac{M}{2}\omega^2\left(\frac{R^2}{4a} + b\right)\operatorname{sen}\theta\cos\theta - M\frac{R^2}{4a}\omega\omega_z\operatorname{sen}\theta \ . \end{aligned} \tag{9}$$

Para resolver completamente el problema haría falta determinar $\ddot{\theta}$ y dejar las expresiones de las reacciones como función tan sólo de $(\theta, \dot{\theta})$ (variables de estado). Para ello podemos emplear la ecuación de Euler tomando momentos en O, en la dirección x. Considerando que los momentos de inercia valen ahora $A' = A + Mb^2$, $C' = C$, resulta

$$M_{Ox} = Mgb\operatorname{sen}\theta = -(A + Mb^2)\ddot{\theta} + 2A\omega\omega_z\operatorname{sen}\theta + (A + Mb^2)\omega^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \ . \tag{10}$$

De aquí despejaríamos $\ddot{\theta}$ para eliminarla en $(9)_5$ y $(9)_6$.

CÁTEDRA DE MECÁNICA