Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

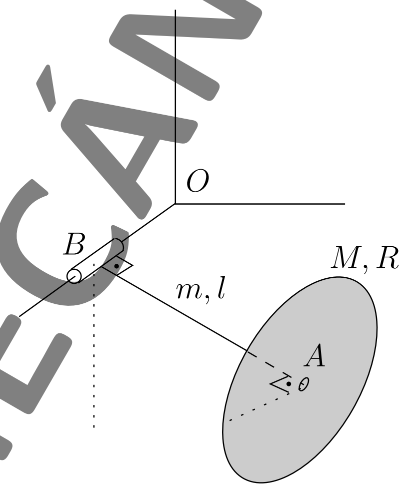
Mecánica

3.$^{\text{er}}$ EXAMEN PARCIAL (27 de marzo de 2004)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Un sistema mecánico está formado por un disco de masa M y radio R, y una varilla de masa m y longitud l. El disco se encuentra unido perpendicularmente a un extremo (A) de la varilla, y puede girar libremente alrededor de ésta. Además, la varilla se mueve de forma que puede deslizar libremente en su otro extremo (B) a lo largo de una recta horizontal, manteniéndose en todo momento perpendicular a ésta. No existe fricción entre ninguna de las partes móviles del sistema.



Se pide:

1. Determinar el número de grados de libertad del sistema, y elegir razonadamente un conjunto adecuado de parámetros que los representen;
2. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento y expresar éstas en función de los grados de libertad y sus derivadas;
3. Calcular las fuerzas de reacción sobre el extremo B de la varilla;
4. Calcular el momento ejercido sobre el extremo B de la varilla, necesario para que ésta permanezca en todo momento perpendicular a la recta sobre la que desliza.

---

1. El sistema tiene 3 grados de libertad, que pueden representarse mediante la distancia (x) del punto B a un punto fijo O, el ángulo θ que forma la varilla BA con la vertical fija descendente, y el giro φ del disco alrededor de la varilla.

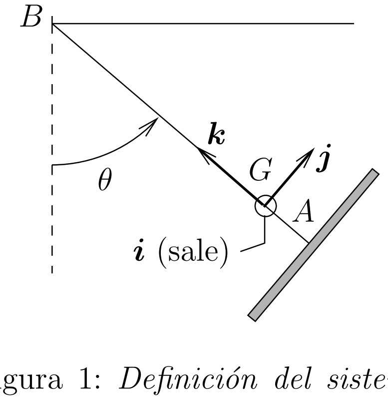


Figura 1: *Definición del sistema móvil auxiliar*

2. El sistema está compuesto por dos sólidos (disco y varilla). No obstante, es también posible resolver el problema considerando un único sólido rígido formado por el disco y la varilla, ya que esta última no tiene inercia según su propio eje, y considerar que es la articulación B la que deja libre el giro φ. En cualquier caso, resulta conveniente emplear un sistema móvil auxiliar en el que el tensor de inercia de los sólidos tenga una expresión constante. Para ello se define el triedro $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, de forma que el versor $\boldsymbol{i}$ es horizontal, el $\boldsymbol{k}$

lleva la dirección de la varilla AB y el versor $\boldsymbol{j}$ es perpendicular a los anteriores formando un triedro a derechas.

Existe una integral primera relacionada con la conservación de la cantidad de movimiento total del sistema según la dirección OB, ya que las fuerzas externas (reacción en B y peso) son perpendiculares a ésta, y se expresa como:

$$\dot{x} = cte \tag{1}$$

Otra integral primera es la conservación de la componente según $\boldsymbol{k}$ del momento cinético en el centro de masa (G) del sistema completo. Para demostrar esta afirmación, basta con considerar el sistema formado por un único sólido rígido, cuyo tensor central de inercia tiene los siguientes componentes en el tridero definido:

$$\boldsymbol{I}_G = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad \begin{aligned} A &= \tfrac{1}{12}ml^2 + m(|\boldsymbol{BG}| - \tfrac{l}{2})^2 + \tfrac{1}{4}MR^2 + M(l - |\boldsymbol{BG}|)^2 \\ C &= \tfrac{1}{2}MR^2 \end{aligned}$$

con $|\boldsymbol{BG}| = l(M + m/2)/(M + m)$. Teniendo en cuenta que el momento de reacción en B lleva la dirección del versor $\boldsymbol{j}$, que todas las fuerzas externas cortan a la varilla, y que ésta es el eje de revolución del sólido rígido completo, la correspondiente componente de la velocidad angular se mantiene constante:

$$\boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{k} = (\boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}) \cdot \boldsymbol{k} = C\dot{\varphi} = cte \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{\varphi} = cte\ , \tag{2}$$

donde se ha tenido en cuenta que la velocidad de rotación del sólido es $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{i} + \dot{\varphi}\boldsymbol{k}$.

Obsérvese que si se interpreta que el sistema está formado por dos sólidos rígidos distintos, el razonamiento descrito anteriormente no es correcto, ya que en general no es posible expresar $\boldsymbol{H}_G$ como $\boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}$.

La última integral primera es la conservación de la energía total, ya que todas las fuerzas externas que trabajan son conservativas (el peso):

$$\begin{aligned} E = T + V &= \frac{1}{2}(M+m)v_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}) + V \\ &= \frac{1}{2}(M+m)\left(\dot{x}^2 + |\boldsymbol{BG}|^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}(A\dot{\theta}^2 + C\dot{\varphi}^2) - (M + \frac{m}{2})gl\cos\theta = cte \end{aligned} \tag{3}$$

Teniendo en cuenta (1) y (2) se observa que el movimiento en θ descrito por la ecuación (3) es pendular, y además que no está influenciado por la rotación propia del disco alrededor de la varilla.

Una manera alternativa de enfocar el problema es considerar que, puesto que la velocidad del punto B es constante, un sistema de referencia móvil con origen en B y de direcciones fijas es inercial. En este caso, B es un punto fijo del sólido rígido formado por el disco y la varilla, respecto de un observador ligado a esta nueva referencia. Puesto que para este observador $\boldsymbol{M}_B = d\boldsymbol{H}_B/dt$ y $\boldsymbol{H}_B = \boldsymbol{I}_B \cdot \boldsymbol{\Omega}$, se conserva la correspondiente componente de la velocidad angular respecto del eje de revolución del sólido ($\dot{\varphi} = cte$). Por otro lado, la energía relativa a este sistema se mantiene constante y se expresa como:

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{I}_B \cdot \boldsymbol{\Omega}) - \left(M + \frac{m}{2}\right) gl\cos\theta \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{4}MR^2 + Ml^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\varphi}^2 - \left(M + \frac{m}{2}\right) gl\cos\theta = cte.\ , \end{aligned}$$

que es equivalente a la obtenida anteriormente (3).

3. La reacción $\boldsymbol{R} = R_y\boldsymbol{j} + R_z\boldsymbol{k}$ puede obtenerse aplicando el principio de cantidad de movimiento al sistema completo.

$$R_y\boldsymbol{j} + R_z\boldsymbol{k} - (M+m)\,g\,[\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k}] = \left(M + \frac{m}{2}\right) l \left[\ddot{\theta}\boldsymbol{j} + \dot{\theta}^2\boldsymbol{k}\right] + \underbrace{(M+m)\ddot{x}\boldsymbol{i}}_{\boldsymbol{0}} \; ,$$

obteniéndose:

$$R_y = (M+m)g\operatorname{sen}\theta + \left(M + \frac{m}{2}\right) l\ddot{\theta} \qquad ; \qquad R_z = (M+m)g\cos\theta + \left(M + \frac{m}{2}\right) l\dot{\theta}^2$$

4. Como se ha dicho anteriormente, el momento reactivo (Γ) lleva la dirección del versor $\boldsymbol{j}$, y puede obtenerse directamente planteando el principio del momento cinético según esa dirección:

$$\frac{d\boldsymbol{H}_G}{dt} \cdot \boldsymbol{j} = \Gamma \tag{4}$$

Considerando de nuevo que el sistema está formado por un único sólido rígido, y teniendo en cuenta que:

$$\frac{d\boldsymbol{H}_G}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{H}_G}{dt}\right)_{\text{rel}} + (\dot{\theta}\boldsymbol{i}) \wedge \boldsymbol{H}_G = A\ddot{\theta}\boldsymbol{i} - C\dot{\theta}\dot{\varphi}\boldsymbol{j} + C\ddot{\varphi}\boldsymbol{k} \; ,$$

se obtiene:

$$\Gamma = -\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}\dot{\varphi}$$