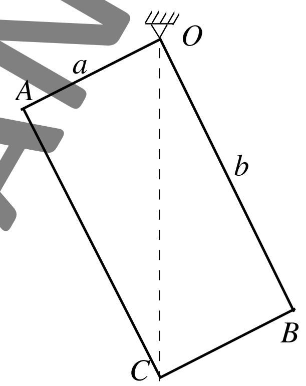
Mecánica

3.$^{\text{er}}$ EXAMEN PARCIAL (27 de Marzo 2003)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Una placa rectangular homogénea $OACB$, de lados a, b y masa m, está articulada en su vértice fijo O. En un cierto instante en que la diagonal OC se encuentra en posición vertical y girando alrededor del lado OA con velocidad angular ω_0, se aplica una percusión P normal al plano de la placa. Se pide:



1. Obtener los puntos de aplicación de P para que en el instante inmediatamente posterior a la percusión la placa gire alrededor de la diagonal OC con velocidad angular ω_0. Determinar el punto de aplicación y el valor de P para que, cumpliéndose las condiciones anteriores, la percusión reactiva en O sea nula.

2. Para el caso $b = a\sqrt{3}$, y con la misma velocidad inicial de la placa, suponemos ahora que una partícula de igual masa m con velocidad v_0 conocida impacta perpendicularmente al plano de la placa en el vértice A con un coeficiente de restitución e dado. Calcular el campo de velocidades de la placa y de la partícula inmediatamente después del choque.

1.— Consideramos coordenadas cartesianas ligadas a la placa con x según OA, y según OB, y z formando un triedro a derechas con los anteriores. El tensor de inercia de la placa en O es

$$[\boldsymbol{I}_O] = m\begin{pmatrix} b^2/3 & -ab/4 & 0 \\ -ab/4 & a^2/3 & 0 \\ 0 & 0 & (a^2+b^2)/3 \end{pmatrix}.$$

Suponiendo la percusión en un punto genérico de la placa $\boldsymbol{r} \equiv (x, y, 0)$, la ecuación de balance del momento cinético en O es

$$\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{P} = \boldsymbol{H}_O^+ - \boldsymbol{H}_O^- = \boldsymbol{I}_O \cdot \Delta\boldsymbol{\Omega} \tag{1}$$

Teniendo en cuenta que la velocidad angular después del choque vale $\Omega_x = \omega_0 a/\sqrt{a^2+b^2}$, $\Omega_y = \omega_0 b/\sqrt{a^2+b^2}$:

$$\begin{cases} Py = \dfrac{mb^2}{3}\omega_0\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - 1\right) - \dfrac{mab}{4}\omega_0\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -Px = -\dfrac{mab}{4}\omega_0\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - 1\right) + \dfrac{ma^2}{3}\omega_0\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} \tag{2}$$

De aquí se deduce, eliminando P, la relación pedida en primer lugar, que constituye una recta:

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}\frac{4\sqrt{a^2+b^2} - a}{3\sqrt{a^2+b^2} + a}.$$

Si la percusión reactiva es nula, el balance de cantidad de movimiento arroja

$$P = m\Delta v_G = m(v_G^+ - v_G^-) = -m\omega_0 \frac{b}{2} \ ,$$

donde se ha tenido en cuenta que $v_G^- = \omega_0 b/2$ y que al producirse una rotación alrededor de la diagonal $v_G^+ = 0$. Sustituyendo este valor de P en (2) se obtiene:

$$y = \frac{1}{6}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(4\sqrt{a^2+b^2} - a\right); \qquad x = \frac{1}{6}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(3\sqrt{a^2+b^2} + a\right). \tag{3}$$

2.— Las ecuaciones de balance (2) son ahora

$$\begin{aligned} 0 &= ma^2\left(\Omega_x - \omega_0\right) - ma^2\frac{\sqrt{3}}{4}\Omega_y \\ -Pa &= -ma^2\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\Omega_x - \omega_0\right) + ma^2\frac{1}{3}\Omega_y \end{aligned} \tag{4}$$

El balance de cantidad de movimiento para la partícula es

$$mv_0 - P = mv_1 \ , \tag{5}$$

donde se ha denominado v_1 a la velocidad de la misma después del choque. Por último, la ecuación que define el coeficiente de restitución es

$$-ev_0 = v_1 + a\Omega_y \ . \tag{6}$$

Resolviendo las ecuaciones (4), (5) y (6) se obtiene

$$\begin{aligned} \Omega_y &= -\frac{48}{55}\frac{v_0}{a}(1+e); & \Omega_x &= \omega_0 - \frac{12\sqrt{3}}{55}\frac{v_0}{a}(1+e); \\ P &= mv_0\frac{7}{55}(1+e); & v_1 &= v_0\frac{1}{55}(48-7e). \end{aligned}$$