Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

4.º EXAMEN PARCIAL (12 de Junio de 2004)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Sea un sistema dinámico definido con coordenadas libres $\{q_i,\ i = 1, \dots n\}$ y función Lagrangiana $L(q_i, \dot{q}_i, t)$. *Definir* la función Hamiltoniana y discutir su significado físico. *Expresar* a partir de la misma las ecuaciones canónicas o de Hamilton. *Aplicar* al caso de un péndulo simple (masa m, longitud ℓ, coordenada angular θ, campo gravitatorio constante g). (5 ptos.)

La *función Hamiltoniana* puede definirse como la transformada de Legendre de la Lagrangiana respecto de las velocidades generalizadas $\dot{q}_i$:

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{k=1}^{n} p_k \dot{q}_k - L \quad \text{siendo } p_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ \textit{(momentos generalizados)}\ .$$

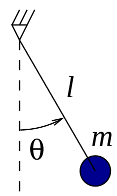
La dependencia funcional de H es sobre las variables (q_i, p_i, t), es decir que deben eliminarse las velocidades generalizadas $\dot{q}_i$ en favor de los momentos generalizados p_i. De la definición anterior se deducen $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden, las *ecuaciones canónicas*:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\dot{p}_i\,; \quad i = 1, \dots n\ .$$

La función Hamiltoniana tiene dimensiones de energía. Para el caso de un sistema sin coordenadas móviles, en que la energía cinética es función cuadrática homogénea de las velocidades generalizadas, equivale a la energía total del sistema:

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} p_k \dot{q}_k \Rightarrow H = \sum_{k=1}^{n} p_k \dot{q}_k - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} p_k \dot{q}_k - V \right) = T + V\ .$$

Aplicación: Se considera un péndulo simple, la Lagrangiana es:



$$L = \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\theta}^2 + mg\ell\cos\theta; \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2 \dot{\theta}\ .$$

La Hamiltoniana y las ecuaciones de Hamilton resultan

$$H(\theta, p_\theta) = p_\theta \dot{\theta} - L = \frac{1}{2} \frac{p_\theta^2}{m\ell^2} - mg\ell\cos\theta;$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m\ell^2}; \quad -\dot{p}_\theta = \frac{\partial H}{\partial \theta} = mg\ell \operatorname{sen}\theta$$

De estas ecuaciones, la primera equivale al cambio de variable que define p_θ. La segunda es la ecuación que equivale a la dinámica en las formulaciones de Lagrange o Newton.

Partiendo de la ecuación de equilibrio de un hilo flexible e inextensible, *estudiar* el caso de un campo de fuerzas paralelo. *Aplicar* a un hilo sometido a carga repartida constante por unidad de abscisa horizontal, *deduciendo* las expresiones de la tensión del hilo y de la configuración de equilibrio. (5 ptos.)

La ecuación vectorial del equilibrio para un cable sometido a fuerzas distribuidas $\boldsymbol{q}$ por unidad de longitud (s) del hilo es

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{q}\,\mathrm{d}s = \boldsymbol{0}.$$

Consideramos un campo de fuerzas paralelo a una dirección dada $\boldsymbol{u}$, es decir $\boldsymbol{q} = q\boldsymbol{u}$. Multiplicando vectorialmente la ecuación de equilibrio por $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{u} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{T} + \underbrace{\boldsymbol{u} \wedge q\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}s}_{=\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{T}) = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{T} = \boldsymbol{K} \text{ (cte.)},$$

de donde se deduce que la configuración es plana (perpendicular a la dirección $\boldsymbol{K}$) y que la componente de $\boldsymbol{T}$ normal a $\boldsymbol{u}$ es constante, $T_\perp = T_0$. Por otra parte, proyectando según $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{u} \cdot q\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}T_u + q\,\mathrm{d}s = 0 \;\Rightarrow\; T_u = -\int q\,\mathrm{d}s\ .$$

Aplicación: Sea p la carga uniforme por unidad de abscisa (x), dirigida según la vertical descendente ($-z$). La carga q por unidad de longitud del hilo es

$$q\,\mathrm{d}s = -p\,\mathrm{d}x\ .$$

El hilo estará contenido en el plano (x, z), siendo z la dirección de la carga (vertical) y x la abscisa (horizontal). Proyectando la ecuación de equilibrio según estas dos direcciones:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right) &= 0 &\Rightarrow\quad & T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = T_x = T_0 \text{ (cte.)};\\
\mathrm{d}\left(T\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right) &= -q\,\mathrm{d}s = p\,\mathrm{d}x &\Rightarrow\quad & T\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = T_z = -\int_0^s q\,\mathrm{d}s = \int_0^x p\,\mathrm{d}x = px.
\end{aligned}$$

(donde se ha tomado el origen $x = 0$ en el vértice, de tangente horizontal.) Por último, dividiendo las dos expresiones anteriores:

$$\frac{T(\mathrm{d}z/\mathrm{d}s)}{T(\mathrm{d}x/\mathrm{d}s)} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{px}{T_0} \;\Rightarrow\; z = \frac{p}{2T_0}x^2,$$

tomando el origen $z = 0$ en el vértice ($x = 0$). Se observa que la configuración corresponde a una *parábola* de eje vertical.