Mecánica

EXAMEN FINAL (12 de Junio de 2004)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Partiendo de la ecuación de equilibrio de un hilo flexible e inextensible, *estudiar* el caso de un campo de fuerzas paralelo. *Aplicar* a un hilo sometido a carga repartida constante por unidad de abscisa horizontal, *deduciendo* las expresiones de la tensión del hilo y de la configuración de equilibrio. (5 ptos.)

La ecuación vectorial del equilibrio para un cable sometido a fuerzas distribuidas $\boldsymbol{q}$ por unidad de longitud (s) del hilo es

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{q}\,\mathrm{d}s = \boldsymbol{0}.$$

Consideramos un campo de fuerzas paralelo a una dirección dada $\boldsymbol{u}$, es decir $\boldsymbol{q} = q\boldsymbol{u}$. Multiplicando vectorialmente la ecuación de equilibrio por $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{u}\wedge\mathrm{d}\boldsymbol{T} + \underbrace{\boldsymbol{u}\wedge q\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}s}_{=\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{T} = \boldsymbol{K}\ \text{(cte.)},$$

de donde se deduce que la configuración es plana (perpendicular a la dirección $\boldsymbol{K}$) y que la componente de $\boldsymbol{T}$ normal a $\boldsymbol{u}$ es constante, $T_\perp = T_0$. Por otra parte, proyectando según $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{u}\cdot q\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}T_u + q\,\mathrm{d}s = 0 \;\Rightarrow\; T_u = -\int q\,\mathrm{d}s\ .$$

Aplicación: Sea p la carga uniforme por unidad de abscisa (x), dirigida según la vertical descendente ($-z$). La carga q por unidad de longitud del hilo es

$$q\,\mathrm{d}s = -p\,\mathrm{d}x\ .$$

El hilo estará contenido en el plano (x,z), siendo z la dirección de la carga (vertical) y x la abscisa (horizontal). Proyectando la ecuación de equilibrio según estas dos direcciones:

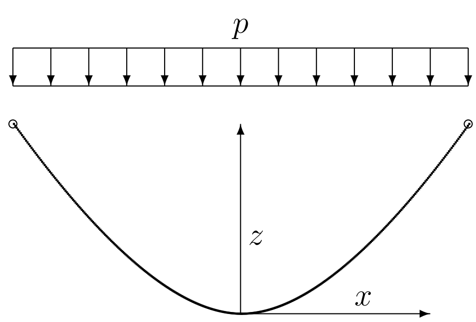
$$\mathrm{d}\left(T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right) = 0 \qquad\Rightarrow\qquad T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = T_x = T_0\ \text{(cte.)};$$

$$\mathrm{d}\left(T\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right) = -q\,\mathrm{d}s = p\,\mathrm{d}x \qquad\Rightarrow\qquad T\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = T_z = -\int_0^s q\,\mathrm{d}s = \int_0^x p\,\mathrm{d}x = px.$$

(donde se ha tomado el origen $x = 0$ en el vértice, de tangente horizontal.) Por último, dividiendo las dos expresiones anteriores:

$$\frac{T(\mathrm{d}z/\mathrm{d}s)}{T(\mathrm{d}x/\mathrm{d}s)} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{px}{T_0} \;\Rightarrow\; z = \frac{p}{2T_0}x^2,$$

tomando el origen $z = 0$ en el vértice ($x = 0$). Se observa que la configuración corresponde a una *parábola* de eje vertical.



Se considera un sistema dinámico lineal con n grados de libertad, del cual se estudian las pequeñas oscilaciones alrededor de una posición de equilibrio estable. *Expresar* de forma general las ecuaciones del movimiento en forma matricial. *Definir* el concepto de modos normales de vibración y frecuencias propias. *Estudiar* para una fuerza externa dada $\{\boldsymbol{f}(t)\}$ su acción sobre la amplitud de vibración de cada uno de los modos, *obteniendo* la condición para que sólo se excite un único modo de vibración y la ecuación correspondiente de la dinámica. (5 ptos.)

Consideramos un sistema con n coordenadas libres $\{\mathbf{q}\} = (q_1, \dots q_n)^{\mathrm{T}}$ sometido a oscilaciones lineales respecto a la posición de equilibrio estable $\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}$, sin amortiguamiento. Las ecuaciones de la dinámica son:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\} \ , \tag{1}$$

denominándose $[\mathbf{M}]$ *matriz de masa* y $[\mathbf{K}]$ *matriz de rigidez*. La solución básica es del tipo $\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{a}\}\cos(\omega t - \delta)$, denominándose $\{\mathbf{a}\}$ *modo normal de vibración* y ω *frecuencia propia* asociada al mismo. Sustituyendo en la ecuación (1),

$$\left(-\omega^2[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{a}\}\right)\cos(\omega t - \delta) = \{\mathbf{0}\} \quad \Rightarrow \quad \left(-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]\right)\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{0}\} \ , \tag{2}$$

que define un problema de autovalores generalizado, para el que existen n posibles soluciones, parejas $(\{\mathbf{a}_k\},\ \lambda_k = \omega_k^2)$. Los modos normales verifican la propiedad de *ortogonalidad* respecto de las matrices de masa y rigidez:

$$\{\mathbf{a}_i\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_j\} = \begin{cases} M_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}; \quad \{\mathbf{a}_i\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_j\} = \begin{cases} \omega_i^2 M_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \tag{3}$$

denominándose M_i *masas modales*. La solución general es una combinación lineal de todos los modos de vibración, $\{\mathbf{q}(t)\} = \sum_{k=1}^{n} B_k \cos(\omega_k t - \delta_k)\{\mathbf{a}_k\}$, donde las constantes (B_k, δ_k) se determinan mediante las condiciones iniciales del movimiento. Se denomina *coordenada normal* de cada modo a su amplitud variable con el tiempo, $u_k(t) = B_k\cos(\omega_k t - \delta_k)$. Así la ecuación anterior se puede expresar como $\{\mathbf{q}(t)\} = \sum_{k=1}^{n}\{\mathbf{a}_k\}u_k(t) \ \Leftrightarrow\ q_i(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}u_k(t)$. Estas ecuaciones pueden entenderse también como un cambio de variables entre las coordenadas físicas originales (q_i) y las coordenadas normales (u_k).

El sistema sometido a una fuerza externa $\boldsymbol{f}(t)$ se caracteriza por la ecuación

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\boldsymbol{f}(t)\} \ , \tag{4}$$

y sustituyendo en función de los modos normales y sus amplitudes,

$$\sum_{k=1}^{n}[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\}\ddot{u}_k + \sum_{k=1}^{n}[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_k\}u_k = \{\boldsymbol{f}(t)\} \ . \tag{5}$$

Premultiplicando por un modo cualquiera dado $\{\mathbf{a}_i\}^{\mathrm{T}}$ y considerando las relaciones de ortogonalidad (3) se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n}\{\mathbf{a}_i\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\}\ddot{u}_k + \sum_{k=1}^{n}\{\mathbf{a}_i\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_k\}u_k = \{\mathbf{a}_i\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{f}(t)\} \tag{6}$$

$$M_i\ddot{u}_i + \omega_i^2 M_i u_i = \{\mathbf{a}_i\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{f}(t)\} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}f_k(t) \tag{7}$$

Esta última ecuación caracteriza la acción de la fuerza $\{\boldsymbol{f}(t)\}$ sobre la amplitud del modo $\{\mathbf{a}_i\}$ mediante la fuerza modal obtenida como producto escalar de ambos vectores. Es fácil comprobar, empleando las condiciones de ortogonalidad (3) que una fuerza definida como $\{\boldsymbol{f}(t)\} = [\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_j\}\,\eta(t)$ produciría una excitación exclusivamente sobre el modo de vibración $\{\mathbf{a}_j\}$, resultando

$$\ddot{u}_j + \omega_j^2 u_j = \eta(t) \ . \tag{8}$$