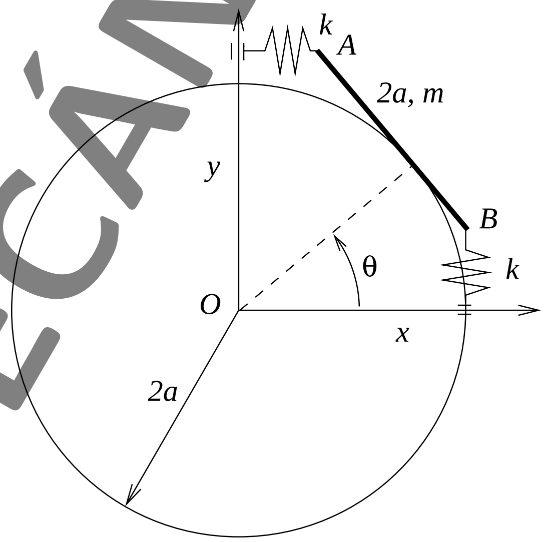
Mecánica

4.º EXAMEN PARCIAL (12 de junio de 2004)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

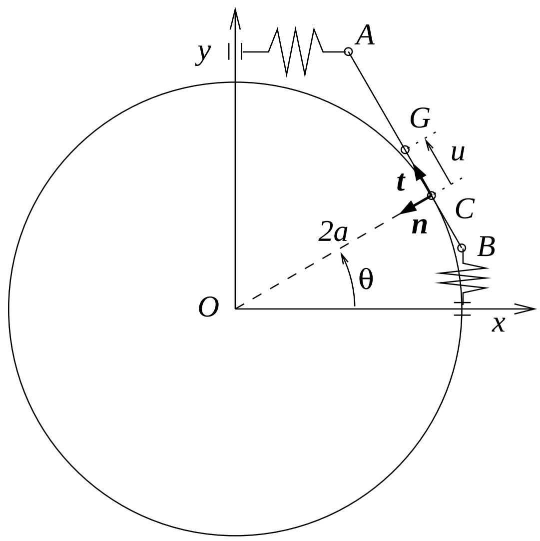
Una varilla homogénea AB, de masa m y longitud $2a$, está contenida en el plano horizontal Oxy, y permanece en contacto sobre el borde de un disco de radio $2a$ y centro en O sin rozamiento, como se indica en la figura. El extremo A de la varilla se une a un resorte de longitud natural nula y constante k que se mantiene paralelo al eje Ox, y el extremo B de la varilla se une a otro resorte igual que se mantiene paralelo a Oy. El disco no estorba a estos resortes.



Se pide:

1. Estudiar el movimiento general de la varilla, obteniendo las ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Estudiar las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición $\theta = \pi/4$, supuesta de equilibrio estable. Obtener las frecuencias naturales y los modos normales de vibración.
3. Calcular las posibles posiciones de equilibrio y estudiar su estabilidad, comprobando la posición anteriormente dada.

1.— El sistema tiene dos grados de libertad, que podemos tomar como el ángulo θ y el deslizamiento u del centro de la varilla respecto del punto C de contacto con el disco. La velocidad del centro G de la varilla puede caracterizarse mediante la composición del arrastre ($\dot\theta$) y el deslizamiento relativo ($\dot u$):



$$\dot{\boldsymbol{v}}_G = \boldsymbol{v}_{\text{arr}} + \boldsymbol{v}_{\text{rel}} = (2a\dot\theta\,\boldsymbol{t} + u\dot\theta\,\boldsymbol{n}) + \dot u\,\boldsymbol{t}\ , \qquad (1)$$

con lo que la energía cinética resulta

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot\theta^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left[(2a\dot\theta + \dot u)^2 + (u\dot\theta)^2\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ma^2\right)\dot\theta^2 \qquad (2) \\ &= \frac{13}{6}ma^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m(4a\dot\theta\dot u + \dot u^2 + u^2\dot\theta^2) \end{aligned}$$

Por otra parte, el potencial es

$$V = \frac{1}{2}kx_A^2 + \frac{1}{2}ky_B^2\ , \qquad (3)$$

y teniendo en cuenta

$$x_A = 2a\cos\theta - (a+u)\operatorname{sen}\theta, \quad y_B = 2a\operatorname{sen}\theta - (a-u)\cos\theta,$$

resulta

$$V = \frac{1}{2}k\left(5a^2 + u^2 - 2au\cos 2\theta - 4a^2\operatorname{sen} 2\theta\right) \ . \tag{4}$$

La Lagrangiana $L = T - V$ resulta finalmente

$$L = \frac{13}{6}ma^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m(4a\dot\theta\dot u + \dot u^2 + u^2\dot\theta^2) - \frac{1}{2}k\left(5a^2 + u^2 - 2au\cos 2\theta - 4a^2\operatorname{sen} 2\theta\right) \ . \tag{5}$$

Derivando se obtienen las ecuaciones de Lagrange de la dinámica:

$$0 = \left(\frac{13}{3}ma^2 + mu^2\right)\ddot\theta + 2ma\ddot u + 2mu\dot u\dot\theta + 2kua\operatorname{sen} 2\theta - 4ka^2\cos 2\theta \tag{6}$$

$$0 = 2ma\ddot\theta + m\ddot u - mu\dot\theta^2 + ku - ka\cos 2\theta \tag{7}$$

2.— Comprobamos que la configuración indicada es de equilibrio:

$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = k\left(2au\operatorname{sen} 2\theta - 4a^2\cos 2\theta\right); \quad \left.\frac{\partial V}{\partial\theta}\right|_{(\theta,u)=(\pi/4,0)} = 0; \tag{8}$$

$$\frac{\partial V}{\partial u} = k\left(u - a\cos 2\theta\right); \quad \left.\frac{\partial V}{\partial u}\right|_{(\theta,u)=(\pi/4,0)} = 0 \ . \tag{9}$$

Linealizamos las ecuaciones suponiendo pequeñas las oscilaciones ($\epsilon = \theta - \pi/4$, u). Teniendo en cuenta $\dot\theta = \dot\epsilon$, $\ddot\theta = \ddot\epsilon$, $\operatorname{sen} 2\theta = \cos 2\epsilon$, $\cos 2\theta = -\operatorname{sen} 2\epsilon$:

$$0 = \frac{13}{3}ma^2\ddot\epsilon + 2ma\ddot u + 8ka^2\epsilon + 2kau \ , \tag{10}$$

$$0 = 2ma\ddot\epsilon + m\ddot u + 2ka\epsilon + ku \ . \tag{11}$$

Identificando coeficientes las matrices de masa y rigidez son respectivamente

$$[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} \frac{13}{3}ma^2 & 2ma \\ 2ma & m \end{pmatrix}; \qquad [\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} 8ka^2 & 2ka \\ 2ka & k \end{pmatrix}. \tag{12}$$

La ecuación característica que permite obtener los autovalores es

$$0 = \det([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}]) = a^2(k - \lambda m)\left[\left(8k - \frac{13}{3}\lambda m\right) - 4(k - \lambda m)\right] \tag{13}$$

de donde se obtienen las frecuencias propias

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = 2\sqrt{\frac{3k}{m}} \ . \tag{14}$$

Para cada frecuencia se obtiene el autovalor (modo normal de vibración) asociado:

$$\det([\mathbf{K}] - \lambda_1[\mathbf{M}])\{\mathbf{a}_1\} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3}ka^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{15}$$

$$\det([\mathbf{K}] - \lambda_2[\mathbf{M}])\{\mathbf{a}_2\} = \begin{pmatrix} -44ka^2 & -22ka \\ -22ka & -11k \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2a \end{Bmatrix} \tag{16}$$

3.— Las posiciones de equilibrio vienen definidas por los puntos en que se anulan las ecuaciones (8) y (9). De esta última se deduce $u = a\cos 2\theta$, y sustituyendo en la primera

$$\cos 2\theta \operatorname{sen} 2\theta - 2\cos 2\theta = 0 \;\Rightarrow\; \cos 2\theta = 0 \;\Rightarrow\; \theta_1 = \pi/4,\, \theta_2 = 3\pi/4\, \theta_3 = 5\pi/4,\, \theta_4 = 7\pi/4\,,$$

siendo en todos los casos $u = 0$. Las derivadas segundas son

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right] = \begin{pmatrix} 4ka(u\cos 2\theta + 2a\operatorname{sen} 2\theta) & 2ka\operatorname{sen} 2\theta \\ 2ka\operatorname{sen} 2\theta & k \end{pmatrix} \tag{17}$$

y particularizando

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right]_{(\theta,u)=(\theta_1,0)} = \begin{pmatrix} 8ka^2 & 2ka \\ 2ka & k \end{pmatrix}, \qquad \left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right]_{(\theta,u)=(\theta_2,0)} = \begin{pmatrix} -8ka^2 & -2ka \\ -2ka & k \end{pmatrix},$$
$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right]_{(\theta,u)=(\theta_3,0)} = \begin{pmatrix} 8ka^2 & 2ka \\ 2ka & k \end{pmatrix}, \qquad \left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right]_{(\theta,u)=(\theta_4,0)} = \begin{pmatrix} -8ka^2 & -2ka \\ -2ka & k \end{pmatrix}.$$

Se comprueba fácilmente que la primera y la tercera posiciones son estables, mientras que la segunda y la cuarta resultan inestables.