Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

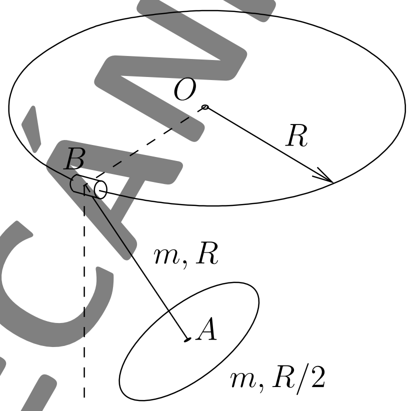
Mecánica

EXAMEN FINAL ORDINARIO (12 de junio de 2004)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Un sólido rígido está formado por una varilla AB de masa m y longitud R, y un disco de masa m y radio $R/2$ soldado en su centro perpendicularmente al extremo A de la varilla. Este sólido se mueve de forma que el punto B permanece sobre una circunferencia horizontal fija y lisa de radio R. Además, existe una articulación cilíndrica en dicho punto B que permite el giro libre del sólido alrededor de la varilla AB, y que adicionalmente obliga a la varilla a permanecer en un plano vertical móvil normal a la circunferencia (definido por OB y BA).



Se pide

1. Determinar el número de grados de libertad del sistema y seleccionar justificadamente un conjunto de coordenadas que los representen;
2. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento;
3. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento del sólido en función de las coordenadas generalizadas y sus derivadas;
4. Obtener el momento que ejerce la articulación B sobre la varilla.

---

1. El sistema tiene 3 grados de libertad, que podemos representar mediante el ángulo ψ que determina la posición del punto B en la circunferencia, el ángulo θ que forma la varilla AB con la vertical fija y el giro propio φ del sólido alrededor de la varilla.

2. Existen tres integrales primeras:

- Conservación de la energía total $E = T + V$, puesto que la única fuerza que trabaja es el peso, que es conservativa.
- Conservación de la componente del momento cinético en G según el eje de revolución del sólido (versor $\boldsymbol{k}$ en la Figura 1). Esto es debido a que el peso está aplicado en el eje, las fuerzas de reacción en B también, y el momento que ejerce la articulación es perpendicular al eje.
- Conservación de la componente vertical del momento cinético en el centro O de la circunferencia fija. Esto es debido a que el peso es vertical, la reacción en B corta al eje vertical, y el momento que la circunferencia ejerce sobre la articulación B es horizontal.

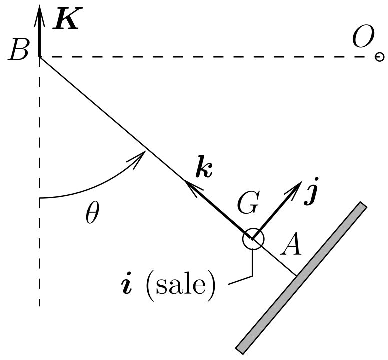


Figura 1: *Definición del sistema mòvil auxiliar*

3. A continuación se obtienen las expresiones correspondientes a las integrales primeras definidas en el apartado anterior, que constituyen las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema pedidas en el enunciado.

Como se trata de un sólido sin punto fijo, la energía total puede expresarse como:

$$E = \frac{1}{2}2mv_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot(\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega}) + V \tag{1}$$

Para expresar las distintas magnitudes que aparecen en (1) es conveniente emplear un sistema móvil auxiliar como el que se muestra en la Figura 1, de forma que el versor $\boldsymbol{k}$ lleva la dirección de la varilla, $\boldsymbol{i}$ es horizontal y $\boldsymbol{j}$ forma con los anteriores un triedro ortonormal orientado a derechas. La velocidad de rotación del sólido se expresa en este sistema como:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot\theta\boldsymbol{i} + \dot\psi\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{j} + (\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)\boldsymbol{k}\ , \tag{2}$$

y la velocidad del centro de masa G, teniendo en cuenta que $\boldsymbol{v}_B = R\dot\psi\boldsymbol{i}$, y que $\boldsymbol{BG} = -3R/4\boldsymbol{k}$, resulta:

$$\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{BG} = R\dot\psi\left(1 - \frac{3}{4}\operatorname{sen}\theta\right)\boldsymbol{i} + \frac{3}{4}R\dot\theta\boldsymbol{j}\ . \tag{3}$$

Por otro lado, el tensor central de inercia del sólido se expresa en el sistema móvil:

$$\boldsymbol{I}_G = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{12}mR^2 + m\left(\frac{R}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}m\left(\frac{R}{2}\right)^2 + m\left(\frac{R}{4}\right)^2 = \frac{13}{48}mR^2 \\ C = \frac{1}{2}m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}mR^2 \end{cases} \tag{4}$$

Por último, suponiendo en origen del potencial gravitatorio en el plano horizontal de la circunferencia fija, el potencial del peso se expresa como:

$$V = -\frac{3}{4}2mgR\cos\theta \tag{5}$$

Introduciendo (2), (3), 4) y (5) en (1) y después de una cierta manipulación, se obtiene la integral primera de la energía:

$$\begin{aligned} E =& \frac{1}{2}mR^2\dot\psi^2\left(\frac{61}{48}\operatorname{sen}^2\theta - 3\operatorname{sen}\theta + \frac{17}{8}\right) \\ &+ \frac{67}{96}mR^2\dot\theta^2 + \frac{1}{16}mR^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{8}mR^2\dot\psi\dot\varphi\cos\theta - \frac{3}{2}mgR\cos\theta = cte. \end{aligned} \tag{6}$$

La expresión correspondiente a la conservación de la componente según el eje de revolución del sólido del momento cinético en G resulta:

$$h = \boldsymbol{H}_G\cdot\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega})\cdot\boldsymbol{k} = C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta) = cte. \tag{7}$$

Por último, la conservación del momento cinético vertical en O, teniendo en cuenta $\boldsymbol{K} = \operatorname{sen}\theta\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k}$ y que $\boldsymbol{GO} = R\cos\theta\boldsymbol{j} + R(3/4 - \operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{k}$, se expresa como:

$$\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{H}_G + 2m\boldsymbol{v}_G\wedge\boldsymbol{GO} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{H}_O\cdot\boldsymbol{K} = A\dot\psi\operatorname{sen}^2\theta + h\cos\theta + 2mR^2\dot\psi\left(1 + \frac{9}{16}\operatorname{sen}^2\theta - \frac{3}{2}\operatorname{sen}\theta\right) \tag{9}$$

$$= mR^2\dot\psi\left(\frac{61}{48}\operatorname{sen}^2\theta - 3\operatorname{sen}\theta + \frac{17}{8}\right) + \frac{1}{8}mR^2\dot\varphi\cos\theta = cte. \tag{10}$$

Es posible obtener las mismas ecuaciones del movimiento mediante el formalismo Lagrangiano, partiendo de la función Lagrangiana $L = T - V$. Puede verse de forma inmediata que tanto φ como ψ son coordenadas cíclicas, con lo que se obtienen las expresiones (7) y (10) correspondientes a dos de las integrales primeras. Además, puesto que las fuerzas activas (el peso) deriva de un potencial y la energía cinética es homogénea de orden 2 en las velocidades generalizadas, se conserva la energía total (6).

4. El momento que la articulación en B ejerce sobre la varilla es:

$$\boldsymbol{M}_B = M_B \boldsymbol{j} \ ,$$

y puede obtenerse directamente del planteamiento del principio del momento cinético en G según $\boldsymbol{j}$:

$$\frac{d\boldsymbol{H}_G}{dt} \cdot \boldsymbol{j} = M_B$$

Haciendo uso del sistema móvil auxiliar, que gira con $\boldsymbol{\Omega}_{\text{ref}} = \boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi}\boldsymbol{k}$, y de las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_G &= A\dot{\theta}\boldsymbol{i} + A\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k} \\ \frac{d\boldsymbol{H}_G}{dt} &= \left(\frac{d\boldsymbol{H}_G}{dt}\right)_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega}_{\text{ref}} \wedge \boldsymbol{H}_G \ , \end{aligned}$$

se obtiene finalmente el momento pedido:

$$\begin{aligned} M_B &= A\left(\ddot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\right) - h\dot{\theta} \\ &= \frac{1}{8}mR^2\left[\frac{13}{6}\left(\ddot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\right) - \frac{h}{C}\dot{\theta}\right] \end{aligned}$$