Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO, REC. 4.º PARCIAL (6 de septiembre de 2004)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Explicar el concepto general de isostatismo e hiperestatismo en un sistema mecánico en equilibrio. *Aplicar* para el caso particular de sistemas planos de barras articuladas, discutiendo la condición de isostatismo e hiperestatismo interno y externo (apoyos), proponiendo ejemplos de cada caso. (5 ptos.)

En primer lugar, caracterizaremos un sistema mecánico formado por piezas rígidas como *estructura* si para cualquier conjunto de fuerzas aplicadas $\boldsymbol{F}_i$ el sistema está necesariamente en equilibrio. Sin embargo, si subsisten grados de libertad internos diremos que el sistema es un *mecanismo.*

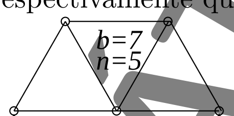
Se denomina *estructura isostática* aquella en que las restricciones producen un conjunto de reacciones que pueden resolverse mediante la sola aplicación de las ecuaciones de la estática. Si el número de restricciones es menor, estaremos ante un mecanismo con grados de libertad. Si por el contrario es mayor, se denomina *estructura hiperestática*, existiendo un número de restricciones (y consiguientemente de reacciones) mayor que el estrictamente necesario para el equilibrio estructural, hay redundancia estática: podría eliminarse alguna coacción y el sistema seguiría siendo estructura.

La condición anterior puede particularizarse a las condiciones de apoyo (restricciones externas). Un sistema puede tener *sustentación isostática* o *hiperestática* (isostatismo o hiperestatismo externo), o bien *sustentación insuficiente.* En el caso general (3D) esta condición corresponde a un número de restricciones independientes igual, mayor o menor que 6 respectivamente. En el caso 2D el número de restricciones para apoyo isostático es de 3.

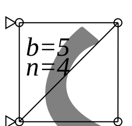
Por otra parte, la condición de isostatismo o hiperestatismo interno se refiere a las restricciones interiores del sistema, lo que puede evaluarse aplicando un sistema cualquiera de fuerzas exteriores nulo ($\sum \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}, \sum(\boldsymbol{M}_O)_i = \boldsymbol{0}$) sobre el sistema aislado y analizando si el número de restricciones interiores es el preciso para el equilibrio o si por el contrario es redundante.

Considerando las reacciones como incógnitas, en un sistema hiperestático las ecuaciones de la estática no son suficientes para determinarlas. Esta paradoja se resuelve en la práctica del cálculo estructural aportando ecuaciones adicionales, que provienen de considerar las relaciones de flexibilidad de las piezas, que en un caso real nunca serán perfectamente rígidas. En un caso ideal de piezas perfectamente rígidas e hiperestático no es posible resolver de manera única las reacciones.

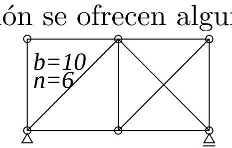
Aplicación: Para el caso de sistemas 2D de barras articuladas, la sustentación completa requiere 3 restricciones, por ejemplo un punto fijo y otro con apoyo deslizante. En cuanto al isostatismo interno, se evalúa por el número de barras b y de nudos n. El número de ecuaciones ó g.d.l. es $2n$ (dos por nudo) y el de incógnitas o restricciones $3+b$ (3 reacciones de apoyo más la tensión en cada barra). Por tanto un sistema será isostático, hiperestático o mecanismo según que $2n$ sea igual, menor o mayor respectivamente que $3+b$. A continuación se ofrecen algunos ejemplos significativos:



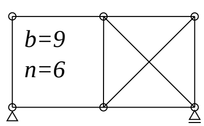
Estructura isostática, con sustentación isostática



Estructura isostática, con sustentación hiperestática



Estructura hiperestática, con sustentación isostática



Mecanismo (aunque es $2n = 3 + b$, la célula cuadrangular de la derecha es hiperestática mientras que la de la izquierda es un mecanismo, globalmente el sistema queda con un grado de libertad).

Se consideran las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable de un sistema mecánico. *Expresar* las ecuaciones que definen los modos normales de vibración y las frecuencias propias asociadas. *Enunciar* las propiedades de dichos modos de vibración *demostrando* la propiedad de ortogonalidad respecto de la matriz de masa. *Expresar* la respuesta general del sistema desarrollada en función de los modos de vibración, indicando las constantes que dependen de las condiciones iniciales y cómo se obtendrían. (5 ptos.)

Consideramos un sistema con n coordenadas libres $\{\mathbf{q}\} = (q_1, \dots q_n)^{\mathrm{T}}$ sometido a oscilaciones lineales respecto a la posición de equilibrio estable $\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}$, sin amortiguamiento. Las ecuaciones de la dinámica son:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\} , \tag{1}$$

denominándose $[\mathbf{M}]$ *matriz de masa* y $[\mathbf{K}]$ *matriz de rigidez*. La solución básica es del tipo $\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{a}\}\cos(\omega t - \delta)$, denominándose $\{\mathbf{a}\}$ *modo normal de vibración* y ω *frecuencia propia* asociada al mismo. Sustituyendo en la ecuación (1),

$$\left(-\omega^2[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{a}\}\right)\cos(\omega t - \delta) = \{\mathbf{0}\} \quad \Rightarrow \quad \left(-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]\right)\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{0}\} , \tag{2}$$

que define un problema de autovalores generalizado, para el que existen n posibles soluciones, parejas $(\{\mathbf{a}_k\},\ \lambda_k = \omega_k^2)$. Estas verifican las siguientes propiedades:

a) Los autovalores y las frecuencias propias son reales y positivas, $\lambda_k > 0$, $\omega_k = +\sqrt{\lambda_k} > 0$;

b) Los vectores propios (modos normales) son reales ($\{\mathbf{a}_k\} \in \mathbb{R}^n$) ;

c) Los autovalores y vectores propios son intrínsecos, es decir independientes de las coordenadas elegidas (para un cambio $\{\mathbf{q}'\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{q}\} \Rightarrow \lambda'_k = \lambda_k;\ \{\mathbf{a}'_k\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{a}_k\}$);

d) Los vectores propios para autovalores distintos son linealmente independientes;

e) Los vectores propios para autovalores distintos son ortogonales respecto de la matriz de masas. Considerando dos modos de vibración $(\{\mathbf{a}_k\}, \{\mathbf{a}_l\})$, correspondientes a autovalores $\lambda_k \neq \lambda_l$, se verifica:

$$\{\mathbf{a}_k\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_l\} = 0 . \tag{3}$$

En efecto, debe cumplirse:

$$\lambda_k[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\} = [\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_k\}; \quad \lambda_l[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_l\} = [\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_l\} ;$$

premultiplicando la primera igualdad por $\{\mathbf{a}_l\}^{\mathrm{T}}$, la segunda por $\{\mathbf{a}_k\}^{\mathrm{T}}$ y restando ambas entre sí, gracias a la simetría de $[\mathbf{M}]$ y de $[\mathbf{K}]$ obtenemos

$$(\lambda_k - \lambda_l)\{\mathbf{a}_k\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_l\} = 0 , \tag{4}$$

y al ser $\lambda_k \neq \lambda_l$ queda demostrada la ortogonalidad (3).

La solución general de (1) es una combinación lineal de las soluciones para cada modo,

$$\{\mathbf{q}(t)\} = \sum_{k=1}^{n} B_k \cos(\omega_k t - \delta_k)\{\mathbf{a}_k\} , \tag{5}$$

donde las $2n$ constantes (B_k, δ_k) se determinan mediante las $2n$ condiciones iniciales del movimiento $(\{\mathbf{q}_0\}, \{\dot{\mathbf{q}}_0\})$. Particularizando en (5) se obtiene

$$\{\mathbf{q}_0\} = \sum_{k=1}^{n} B_k\{\mathbf{a}_k\}\cos\delta_k; \quad \{\dot{\mathbf{q}}_0\} = \sum_{k=1}^{n} B_k\omega_k\{\mathbf{a}_k\}\operatorname{sen}\delta_k ,$$

y premultiplicando por $\{\mathbf{a}_l\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}]$ se llega finalmente a

$$B_l M_l \cos\delta_l = \{\mathbf{a}_l\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}]\{\mathbf{q}_0\};\ B_l\omega_l M_l \operatorname{sen}\delta_l = \{\mathbf{a}_l\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}]\{\dot{\mathbf{q}}_0\} , \quad (\text{siendo } M_l = \{\mathbf{a}_l\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_l\}) .$$

Se denomina *coordenada normal* de cada modo a su amplitud variable con el tiempo, $u_k(t) = B_k\cos(\omega_k t - \delta_k)$. Así la ecuación (5) se puede expresar también como $\{\mathbf{q}(t)\} = \sum_{k=1}^{n}\{\mathbf{a}_k\}u_k(t) \Leftrightarrow q_i(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}u_k(t)$. Estas ecuaciones pueden entenderse como un cambio de variables entre las coordenadas geométricas originales (q_i) y las coordenadas normales (u_k).