

## Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO, REC. 4.º PARCIAL (6 de septiembre de 2004)

Apellidos	Nombre	N.º	Grupo

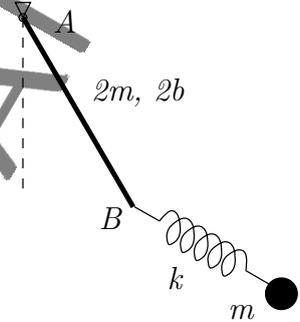
Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30)

Tiempo: 60 min.

Una partícula de masa  $m$  está unida al extremo de un hilo elástico, de longitud natural  $b$  y constante  $k = 3mg/b$ , cuyo otro extremo va unido al extremo  $B$  de una barra homogénea  $AB$ , de masa  $2m$  y longitud  $2b$ , cuyo extremo  $A$  está fijo. El conjunto puede moverse en un plano vertical.

Se pide:

1. Ecuaciones generales de la dinámica del sistema y su linealización para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable.
2. Frecuencias propias del sistema y modos normales de vibración.
3. Expresión de las coordenadas normales.



1.— El sistema tiene 3 g.d.l. para los que tomaremos el ángulo  $\theta$  que forma la barra  $AB$  con la vertical descendente, el ángulo  $\phi$  que forma el hilo elástico con la vertical descendente, y la longitud del hilo  $s$ . El sistema es conservativo y su energía potencial vale

$$V(\theta, \phi, s) = -2mgb \cos \theta - mg(2b \cos \theta + s \cos \phi) + \frac{1}{2}k(s - b)^2, \quad (1)$$

de donde se deduce directamente la posición de equilibrio:

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \theta} = 4mgb \sin \theta, \quad 0 = \frac{\partial V}{\partial \phi} = mgs \sin \phi, \quad 0 = \frac{\partial V}{\partial s} = -mg \cos \phi + k(s - b),$$

$$\Rightarrow \theta = \phi = 0, \quad s = \frac{4}{3}b. \quad (2)$$

Se comprueba que el equilibrio es estable mediante la matriz de derivadas segundas en dicho punto:

$$[\mathbf{K}] = \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right] = \begin{pmatrix} 4mgb & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}mgb & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} > 0 \quad (\text{def. positiva}). \quad (3)$$

La energía cinética vale

$$T = \frac{1}{2} \frac{1}{3} 2m(2b)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \left[ (s\dot{\phi} + 2b\dot{\theta} \cos(\phi - \theta))^2 + (\dot{s} + 2b\dot{\theta} \sin(\phi - \theta))^2 \right], \quad (4)$$

con lo que la Lagrangiana es

$$L = \frac{4}{3} mb^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \left[ s^2 \dot{\phi}^2 + 4b\dot{\theta} (s\dot{\phi} \cos(\phi - \theta) + \dot{s} \sin(\phi - \theta)) + 4b^2 \dot{\theta}^2 + \dot{s}^2 \right]$$

$$+ 4mgb \cos \theta + mgs \cos \phi - \frac{1}{2} k(s - b)^2. \quad (5)$$

Derivando ésta se obtienen las ecuaciones de Lagrange,

$$0 = \frac{20}{3}mb^2\ddot{\theta} + 2mbs\ddot{\phi} \cos(\phi - \theta) - 2mbs\dot{\phi}^2 \sin(\phi - \theta) + 2mbs\ddot{s} \sin(\phi - \theta) + 4mbs\dot{\phi} \cos(\phi - \theta) + 4mgb \sin \theta, \quad (6)$$

$$0 = ms^2\ddot{\phi} + 2ms\dot{s}\dot{\phi} + 2mbs\ddot{\theta} \cos(\phi - \theta) + 2mbs\dot{\theta}^2 \sin(\phi - \theta) + mgs \sin \phi, \quad (7)$$

$$0 = 2mb\ddot{\theta} \sin(\phi - \theta) + m\ddot{s} - 2mb\dot{\theta}^2 \cos(\phi - \theta) - ms\dot{\phi}^2 - mg \cos \phi + k(s - b). \quad (8)$$

Linealizando alrededor de la posición de equilibrio, para valores pequeños de  $(\theta, \phi, \epsilon = s - 4b/3)$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{20}{3}mb^2\ddot{\theta} + \frac{8}{3}mb^2\ddot{\phi} + 4mgb\theta, \\ 0 &= \frac{8}{3}mb^2\ddot{\theta} + \frac{16}{9}mb^2\ddot{\phi} + \frac{4}{3}mgb\phi, \\ 0 &= m\ddot{\epsilon} + 3\frac{mg}{b}\epsilon. \end{aligned} \quad (9)$$

Estas ecuaciones podrían haberse obtenido también de forma directa sin necesitar obtener las ecuaciones generales (6), (7) y (8). Para ello bastaría calcular las matrices de coeficientes mediante las derivadas segundas particularizadas en la posición de equilibrio  $\mathbf{q}_0$ . La matriz  $[\mathbf{K}]$  ya ha sido obtenida en (3), mientras que la matriz de masa es

$$[\mathbf{M}] = \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right]_{\mathbf{q}_0} = \begin{pmatrix} \frac{20}{3}mb^2 & \frac{8}{3}mb^2 & 0 \\ \frac{8}{3}mb^2 & \frac{16}{9}mb^2 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}; \quad (10)$$

En función de estas matrices la ecuación diferencial correspondiente a (9) se expresa como

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \mathbf{0}. \quad (11)$$

2.— Las frecuencias propias se obtienen como soluciones de la ecuación característica:

$$0 = \det([\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}]) = \left(3\frac{mg}{b} - \omega^2 m\right) \left(\frac{128}{27}\omega^4 - 16\frac{g}{b}\omega^2 + \frac{16}{3}\left(\frac{g}{b}\right)^2\right), \quad (12)$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{b}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3g}{b}}; \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{3g}{8b}}. \quad (13)$$

Los modos normales asociados a cada frecuencia se obtienen mediante las expresiones

$$([\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}])\{\mathbf{a}\} = \mathbf{0}, \quad (14)$$

$$\Rightarrow \{\mathbf{a}_1\} = (0 \ 0 \ 1)^T; \quad \{\mathbf{a}_2\} = (-1/2 \ 1 \ 0)^T; \quad \{\mathbf{a}_3\} = (2/3 \ 1 \ 0)^T. \quad (15)$$

(Los vectores propios no se han normalizado respecto a la matriz de masa, sino que se han seleccionado con el máximo elemento igual a la unidad.)

3.— Las coordenadas normales son las amplitudes de los modos, por lo que

$$(\theta \ \phi \ \epsilon)^T = u_1\{\mathbf{a}_1\} + u_2\{\mathbf{a}_2\} + u_3\{\mathbf{a}_3\} \quad (16)$$

Las relaciones que definen las coordenadas normales son por tanto

$$\begin{cases} \theta = -\frac{1}{2}u_2 + \frac{2}{3}u_3 \\ \phi = u_2 + u_3 \\ \epsilon = u_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} u_1 = \epsilon \\ u_2 = -\frac{6}{7}\theta + \frac{4}{7}\phi \\ u_3 = \frac{6}{7}\theta + \frac{3}{7}\phi \end{cases}. \quad (17)$$