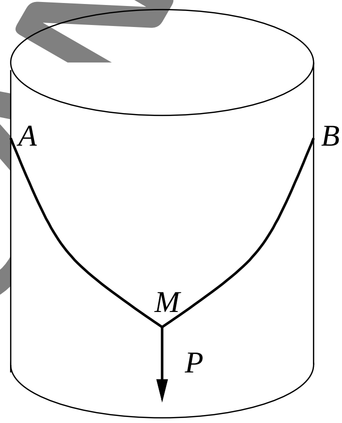
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO Y REC. 4.º PARCIAL (6 de septiembre de 2004)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: final 10/45, parcial 10/30) Tiempo: 60 min.

Un hilo inextensible AB se cuelga por sus extremos de dos puntos A y B de la superficie lateral lisa de un cilindro (fijo, de revolución, radio r, y eje vertical). Ambos puntos están situados a la misma altura y diametralmente opuestos. En el punto medio M del hilo se cuelga un peso P.



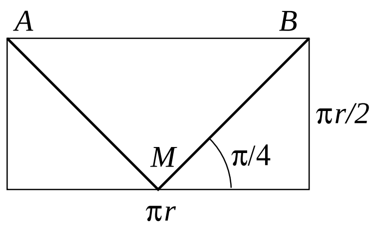
Se desea que los dos tramos de hilo, AM y BM, sean ortogonales en M, para lo que se pide calcular la longitud que debe tener el hilo, en los dos casos siguientes:

1. El peso propio del hilo es despreciable. Deducir previamente cuál será la curva determinada por cada uno de los dos tramos del hilo.
2. El hilo tiene un peso específico P/r, siendo homogéneo. Demostrar previamente que, si se desarrolla la superficie lateral del cilindro, cada tramo de hilo es un arco de catenaria.

1.— En este caso se trata de un hilo apoyado sobre una superficie lisa sin cargas, por lo que la curva de equilibrio es una geodésica del cilindro, que será una hélice. Las ecuaciones de la hélice, en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z), son $\rho = r$, $z = p\phi$, siendo la constante p el paso de la hélice. En el vértice M, para que ambos tramos sean perpendiculares, el ángulo que forma el tramo de la derecha con la tangente horizontal al cilindro debe ser $\pi/4$, por lo que

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\phi} \quad \Rightarrow \quad p = r\ .$$

En consecuencia, cada tramo de hilo sobre la superficie desarrollada del cilindro es una recta de pendiente $\pi/4$, que abarca $r\pi/2$ tanto en horizontal como en vertical. La longitud total es:



$$L = 2\left(r\frac{\pi}{2}\sqrt{2}\right) = r\pi\sqrt{2}\ .$$

Obsérvese que resulta independiente del valor de la carga P.

2.— En este caso las curvas de equilibrio ya no son geodésicas, al tener la carga de su peso propio. Sin embargo, el problema resulta fácil de resolver ya que dicha carga es tangente al cilindro, y desarrollando el mismo puede comprobarse que la curva es una catenaria. En efecto, usando coordenadas cilíndricas:

$$\boldsymbol{q} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{0}; \quad \boldsymbol{q} = -q\,\boldsymbol{u}_z + N\,\boldsymbol{u}_r; \quad \boldsymbol{T} = T\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = T\left(r\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{u}_\phi + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{u}_z\right) \tag{1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(Tr\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\right) = 0; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right) = q \tag{2}$$

El razonamiento sigue los mismos pasos que el de la catenaria en un sistema cartesiano (x, z), mediante el cambio de variable $x = r\phi$ que corresponde al desarrollo del cilindro.

En primer lugar, de la ecuación $(2)_1$ se deduce que la componente ϕ de la tensión será constante:

$$T_\phi = Tr\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = T\frac{\mathrm{d}(r\phi)}{\mathrm{d}s} = T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = T_0 \ ;$$

de la otra ecuación $(2)_2$, empleando el resultado anterior,

$$q = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{T_0}{r}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right) = T_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right) = T_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) \ ,$$

y empleando la regla de la cadena,

$$q = T_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = T_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \ .$$

Finalmente, teniendo en cuenta las relaciones

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (\mathrm{d}z/\mathrm{d}\phi)^2}}; \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\mathrm{d}z/\mathrm{d}x)^2}}; \quad a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{T_0}{q} \ ,$$

se obtiene la ecuación diferencial

$$1 = a\frac{z''}{\sqrt{1 + z'^2}} \ , \tag{3}$$

donde se ha llamado $z' \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{d}z/\mathrm{d}x$, $z'' \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{d}^2z/\mathrm{d}x^2$. Es inmediato comprobar que esta ecuación diferencial es idéntica a la de la catenaria en coordenadas cartesianas, por lo que la curva obtenida de su integración será la misma catenaria,

$$z = a\cosh\frac{x}{a} = a\cosh\frac{r\phi}{a} \ . \tag{4}$$

En el punto medio M, para verificar la perpendicularidad en ambos tramos, la pendiente debe valer $\pi/4$, por lo que

$$\operatorname{senh}\frac{x_M}{a} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \ ;$$

Por otra parte, la tensión vertical en el punto medio vale $P/2$, por lo que

$$\frac{P}{2} = qa\operatorname{senh}\frac{x_M}{a} = qa \quad \Rightarrow \quad a = \frac{P}{2q} = \frac{r}{2} \ .$$

Finalmente, la longitud total se obtiene como el doble del tramo entre x_M y $x_B = x_M + (\pi/2)r$:

$$\begin{aligned} L &= 2a\left[\operatorname{senh}\frac{x_B}{a} - \operatorname{senh}\frac{x_M}{a}\right] \\ &= 2a\left[\operatorname{senh}\frac{x_M}{a}\cosh\frac{\pi r}{2a} + \cosh\frac{x_M}{a}\operatorname{senh}\frac{\pi r}{2a} - \operatorname{senh}\frac{x_M}{a}\right] \\ &= r\left[\cosh\pi + \sqrt{2}\operatorname{senh}\pi - 1\right] = 26{,}92r \ . \end{aligned}$$