Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (6 de septiembre de 2004)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 5/45) Tiempo: 30 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Partiendo de la expresión general de la derivada de un vector en un sistema de referencia móvil, *deducir* las expresiones de los campos de velocidades y aceleraciones de un sólido rígido. *Aplicación:* Una circunferencia de radio R rueda sin deslizar sobre otra circunferencia fija de igual radio R, con velocidad constante, estando ambas en un mismo plano y de forma que una revolución completa tarda $2\pi/\omega$. *Obtener* la aceleración del punto de la circunferencia móvil que en un instante genérico se halla sobre el punto de rodadura. (5 ptos.)

Consideramos un vector $\boldsymbol{p}(t)$ que varía con el tiempo, un sistema de referencia S_0 que consideramos fijo o absoluto y otro S_1 que consideramos móvil, caracterizado por una velocidad de rotación $\boldsymbol{\omega}$ respecto de S_0. La derivada de $\boldsymbol{p}$ que mide un observador ligado al sistema fijo S_0 la llamaremos $\dot{\boldsymbol{p}} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$, y para el sistema S_1 se denomina $(\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t)_{\mathrm{rel}}$. La relación entre estas derivadas es

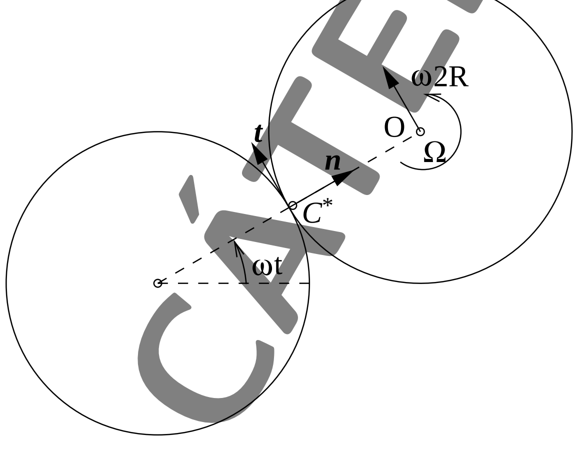
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{rel}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{p}. \tag{1}$$

Suponemos ahora un sólido rígido cuyo movimiento se define por la velocidad de uno de sus puntos $\boldsymbol{v}_O$ y su velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$, que es también la de un sistema de referencia móvil ligado al sólido. El vector posición de un punto genérico del sólido desde una referencia fija (inercial) es $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{\rho}$, siendo $\boldsymbol{\rho}$ el vector posición relativo a O. La velocidad resulta de la derivada (absoluta) de $\boldsymbol{r}$, donde aplicamos la fórmula (1) a $\boldsymbol{\rho}$ y tenemos en cuenta que $(\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}/\mathrm{d}t)_{\mathrm{rel}} = \boldsymbol{0}$:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_O}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{rel}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}. \tag{2}$$

Si derivamos otra vez obtenemos la aceleración:

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_O}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}). \tag{3}$$



Aplicación: Basta con emplear la ecuación (3), para lo que obtenemos antes el valor de todos sus términos. La aceleración del centro O de la circunferencia móvil es $\boldsymbol{a}_O = -2R\omega^2\boldsymbol{n}$. A continuación debemos calcular la velocidad de rotación de la circunferencia móvil, para lo que impondremos que la velocidad del punto de rodadura C^* sea nula: $0 = \omega 2R - \Omega R$, es decir $\Omega = 2\omega$. Como es constante, será $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{0}$. El vector posición relativa del punto C^* vale $\boldsymbol{\rho} = -R\,\boldsymbol{n}$, por lo que $\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}) = -\Omega^2\,\boldsymbol{\rho} = 4R\omega^2\,\boldsymbol{n}$. En consecuencia,

$$\boldsymbol{a}_{C^*} = -2R\omega^2\,\boldsymbol{n} + 4R\omega^2\,\boldsymbol{n} = 2R\omega^2\,\boldsymbol{n}\,.$$