ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS (MADRID)

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (6 de septiembre de 2004)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Sea un sistema dinámico definido con coordenadas libres $\{q_i,\ i = 1, \dots n\}$ cuya dinámica está determinada por la función Lagrangiana $L(q_i, \dot{q}_i, t)$. *Deducir* en qué casos la integral de Jacobi $h = \sum_{i=1}^{n}(\partial L/\partial \dot{q}_i)\dot{q}_i - L$ se conserva y si coincide con la energía mecánica total del sistema. *Aplicación:* estudiar un sistema lineal masa–muelle con un grado de libertad, cuyo punto de anclaje se mueve con velocidad constante impuesta v_0. (5 ptos.)

Derivando la función lagrangiana y haciendo uso de la regla de la cadena:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t},$$

donde se acepta la convención de suma implícita para los índices repetidos. Si se tiene en cuenta ahora las ecuaciones de Lagrange, $\partial L/\partial q_i = (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(\partial L/\partial \dot{q}_i)$, y agrupando términos,

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right)}_{\stackrel{\text{def}}{=} h} = -\frac{\partial L}{\partial t}\ .$$

La ecuación anterior indica que si la Lagrangiana L no depende explícitamente del tiempo (es decir, si $\partial L/\partial t = 0$), h es una constante del movimiento denominada *integral de Jacobi*:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = \text{cte.}$$

Admitiendo como es usual que el potencial V no depende de las velocidades generalizadas $\dot{q}_i$, si la energía cinética es una función cuadrática homogénea de las mismas, h coincidirá con la energía total:

$$\text{si } T = \frac{1}{2}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - (T - V) = \underbrace{(a_{ij}\dot{q}_j)\,\dot{q}_i}_{=2T} - (T - V) = T + V\ .$$

La condición anterior se cumplirá siempre que la definición de las coordenadas generalizadas no dependa del tiempo, es decir $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\boldsymbol{r}_k(q_i) = 0$. En este caso la conservación de h equivale al principio de conservación de la energía. En caso contrario será en general $h \neq T + V$, que además según los casos podrá o no conservarse (ver aplicación a continuación).

Aplicación: Sea m la masa, k la constante del resorte y s la la extensión del mismo respecto de su longitud natural; la Lagrangiana es $L = (1/2)m(v_0 + \dot{s})^2 - (1/2)ks^2$, por lo cual $h = (\partial L/\partial \dot{s})\dot{s} - L = (1/2)m(v_0 + \dot{s})^2 - mv_0(v_0 + \dot{s}) + (1/2)ks^2$. Se comprueba que $h \neq T + V$, como era de esperar ya que la coordenada generalizada s se define en un marco móvil con velocidad v_0. Sin embargo, se cumple $\partial L/\partial t = 0$, por lo que se conserva la integral de Jacobi: $h = \text{cte.}$ Se puede verificar fácilmente que esta conservación corresponde a la energía relativa medida por un observador móvil, $T_{\text{rel}} + V = (1/2)m\dot{s}^2 + (1/2)ks^2 = h + (1/2)mv_0^2$, lo que simplemente constata que el sistema de referencia a pesar de ser móvil es inercial ($v_0 = \text{cte.}$).

Explicar el concepto general de isostatismo e hiperestatismo en un sistema mecánico en equilibrio. *Aplicar* para el caso particular de sistemas planos de barras articuladas, discutiendo la condición de isostatismo e hiperestatismo interno y externo (apoyos), proponiendo ejemplos de cada caso. (5 ptos.)

En primer lugar, caracterizaremos un sistema mecánico formado por piezas rígidas como *estructura* si para cualquier conjunto de fuerzas aplicadas $\boldsymbol{F}_i$ el sistema está necesariamente en equilibrio. Sin embargo, si subsisten grados de libertad internos diremos que el sistema es un *mecanismo.*

Se denomina *estructura isostática* aquella en que las restricciones producen un conjunto de reacciones que pueden resolverse mediante la sola aplicación de las ecuaciones de la estática. Si el número de restricciones es menor, estaremos ante un mecanismo con grados de libertad. Si por el contrario es mayor, se denomina *estructura hiperestática*, existiendo un número de restricciones (y consiguientemente de reacciones) mayor que el estrictamente necesario para el equilibrio estructural, hay redundancia estática: podría eliminarse alguna coacción y el sistema seguiría siendo estructura.

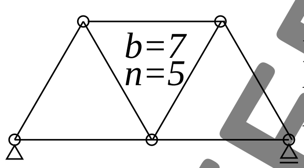
La condición anterior puede particularizarse a las condiciones de apoyo (restricciones externas). Un sistema puede tener *sustentación isostática* o *hiperestática* (isostatismo o hiperestatismo externo), o bien *sustentación insuficiente.* En el caso general (3D) esta condición corresponde a un número de restricciones independientes igual, mayor o menor que 6 respectivamente. En el caso 2D el número de restricciones para apoyo isostático es de 3.

Por otra parte, la condición de isostatismo o hiperestatismo interno se refiere a las restricciones interiores del sistema, lo que puede evaluarse aplicando un sistema cualquiera de fuerzas exteriores nulo ($\sum \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}, \sum (\boldsymbol{M}_O)_i = \boldsymbol{0}$) sobre el sistema aislado y analizando si el número de restricciones interiores es el preciso para el equilibrio o si por el contrario es redundante.

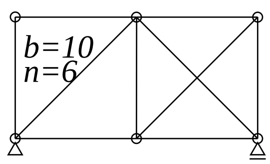
Considerando las reacciones como incógnitas, en un sistema hiperestático las ecuaciones de la estática no son suficientes para determinarlas. Esta paradoja se resuelve en la práctica del cálculo estructural aportando ecuaciones adicionales, que provienen de considerar las relaciones de flexibilidad de las piezas, que en un caso real nunca serán perfectamente rígidas. En un caso ideal de piezas perfectamente rígidas e hiperestático no es posible resolver de manera única las reacciones.

Aplicación: Para el caso de sistemas 2D de barras articuladas, la sustentación completa requiere 3 restricciones, por ejemplo un punto fijo y otro icon apoyo deslizante. En cuanto al isostatismo interno, se evalúa por el número de barras b y de nudos n. El número de ecuaciones ó g.d.l. es $2n$ (dos por nudo) y el de incógnitas o restricciones $3 + b$ (3 reacciones de apoyo más la tensión en cada barra). Por tanto un sistema será isostático, hiperestático o mecanismo según que $2n$ sea igual, menor o mayor respectivamente que $3 + b$.

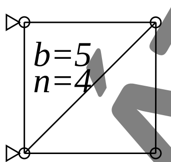
A continuación se ofrecen algunos ejemplos significativos:



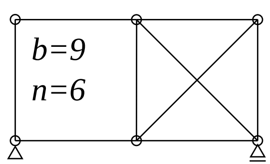
Estructura isostática, con sustentación isostática



Estructura hiperestática, con sustentación isostática



Estructura isostática, con sustentación hiperestática



Mecanismo (aunque es $2n = 3 + b$, la célula cuadrangular de la derecha es hiperestática mientras que la de la izquierda es un mecanismo, globalmente el sistema queda con un grado de libertad).