# Mecánica

EXAMEN PARCIAL (27 de noviembre de 2004)

| *Apellidos* | *Nombre* | *N.º* | *Grupo* |
|---|---|---|---|
| | | | |

*Ejercicio 1.º* (puntuación: 10/30) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

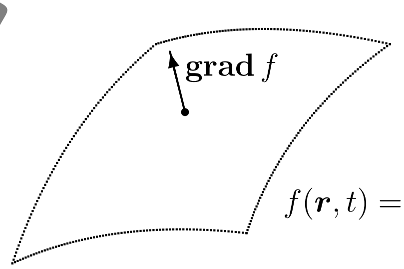
---

*Plantear* las ecuaciones del movimiento de una partícula sobre una superficie lisa y móvil. Para el caso frecuente de que la superficie sea fija, *aplicar* el teorema de la energía. (5 ptos.)

---

La superficie puede definirse en forma implícita por una ecuación escalar

$$f(\boldsymbol{r}, t) = 0, \tag{1}$$




cuya normal viene dada por $\mathbf{grad}\, f = \partial f / \partial \boldsymbol{r}$. Si existen otras fuerzas aplicadas $\boldsymbol{F}$ —además de la reacción normal $\boldsymbol{N} = \lambda\, \mathbf{grad}\, f$— la ecuación dinámica será:

$$\boldsymbol{F} + \lambda\, \mathbf{grad}\, f = m\ddot{\boldsymbol{r}} \tag{2}$$

El problema queda planteado con las tres ecuaciones escalares (2) y la propia de la superficie (1), para las cuatro incógnitas $(x, y, z, \lambda)$.

El trabajo elemental se obtiene multiplicando escalarmente (2) por el desplazamiento elemental $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Suponiendo que la superficie es fija ($\partial f/\partial t = 0$), se verifica $\mathbf{grad}\, f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$ y por tanto

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = m\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\left(\frac{mv^2}{2}\right) \tag{3}$$

Para resolver la posición sobre la superficie sería necesario determinar los dos parámetros $(u, v)$, coordenadas de la superficie. Así:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\mathrm{d}v \\
\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\mathrm{d}u + \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\mathrm{d}v = Q_u \mathrm{d}u + Q_v \mathrm{d}v \\
&= \mathrm{d}\left(\frac{mv^2}{2}\right),
\end{aligned}$$

donde $Q_u \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{F} \cdot \partial \boldsymbol{r}/\partial u$, $Q_v \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{F} \cdot \partial \boldsymbol{r}/\partial v$. Sería necesario integrar esta ecuación diferencial para resolver el problema.

Si $\boldsymbol{F}$ proviene de un potencial, $\boldsymbol{F} = -\mathrm{d}V/\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, por lo que $\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ es diferencial exacto, y de la integración de (3) se obtiene

$$\frac{mv^2}{2} + V(\boldsymbol{r}) = E \text{ (cte.)}.$$

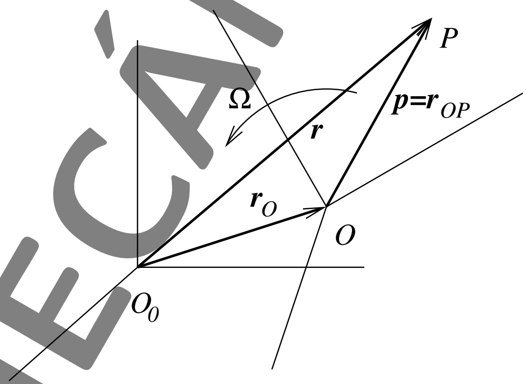
Por último, cabe advertir que la condición de que la superficie sea lisa y fija no conduce necesariamente a la conservación de la energía. Para ello debe exigirse además que las fuerzas aplicadas $\boldsymbol{F}$ sean conservativas.

*Expresar* la derivada de un vector $\boldsymbol{p}$ definido en un sistema de referencia móvil. Empleando el resultado anterior, *deducir* la expresión de la velocidad a través de un sistema de referencia móvil. *Aplicación:* Sea un sistema de referencia móvil $S_1$ del que se conoce la velocidad de un punto $O_1$ y su velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}_1$, y otro sistema $S_2$ del que se conoce la velocidad de $O_2$ y la de rotación $\boldsymbol{\Omega}_2$, ambas relativas al sistema $S_1$. Obtener la expresión de la velocidad absoluta de un punto ligado a $S_2$, demostrando que la velocidad de rotación absoluta es la suma $\boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{\Omega}_2$. (5 ptos.)

---

La derivada de un vector $\boldsymbol{p}$ definido en una referencia móvil, cuya velocidad de rotación es $\boldsymbol{\Omega}$, se expresa mediante

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{p}\,. \tag{1}$$

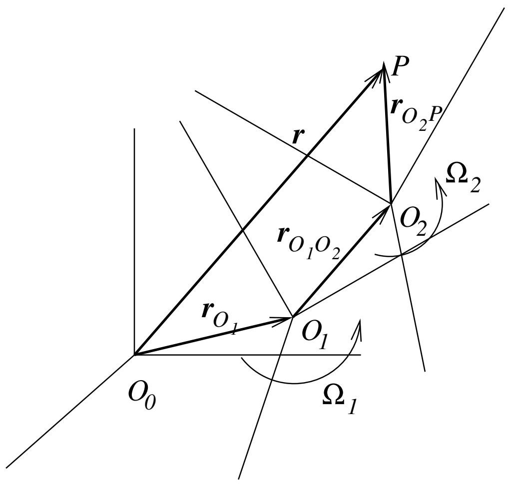



Consideramos ahora el vector posición de un punto, que puede descomponerse como suma del vector posición del origen $O$ de la referencia móvil y el vector posición relativo, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{r}_{OP}$. La velocidad se obtiene derivando respecto al tiempo, donde la derivada de $\boldsymbol{r}_{OP}$ la realizaremos mediante la referencia móvil con la expresión (1):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_O}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{OP} + \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{OP}}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{rel}} \\ &= \underbrace{\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{OP}}_{\boldsymbol{v}_{\text{arr}}} + \boldsymbol{v}_{\text{rel}}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

**Aplicación.**— Consideramos la descomposición de la velocidad de $P$ relativa al movimiento de $S_1$, aplicando las fórmulas (2). Tendremos en cuenta que, al tratarse de un punto ligado a $S_2$, su velocidad relativa respecto a este sistema es nula:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_{\text{arr}}\big|_{S_1} &= \boldsymbol{v}_{O_1} + \boldsymbol{\Omega}_1 \wedge \boldsymbol{r}_{O_1P}\,; \\ \boldsymbol{v}_{\text{rel}}\big|_{S_1} &= \boldsymbol{v}_{O_2|S_1} + \boldsymbol{\Omega}_2 \wedge \boldsymbol{r}_{O_2P} + \underbrace{\boldsymbol{v}_{\text{rel}}\big|_{S_2}}_{=\boldsymbol{0}}\,. \end{aligned}$$




Considerando $\boldsymbol{r}_{O_1P} = \boldsymbol{r}_{O_1O_2} + \boldsymbol{r}_{O_2P}$ y sumando ambas,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}_{O_1} + \boldsymbol{\Omega}_1 \wedge (\boldsymbol{r}_{O_1O_2} + \boldsymbol{r}_{O_2P}) + \boldsymbol{v}_{O_2|S_1} + \boldsymbol{\Omega}_2 \wedge \boldsymbol{r}_{O_2P} \\ &= \boldsymbol{v}_{O_1} + \boldsymbol{v}_{O_2|S_1} + \boldsymbol{\Omega}_1 \wedge \boldsymbol{r}_{O_1O_2} + \boldsymbol{\Omega}_1 \wedge \boldsymbol{r}_{O_2P} + \boldsymbol{\Omega}_2 \wedge \boldsymbol{r}_{O_2P} \\ &= \boldsymbol{v}_{O_2} + (\boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{\Omega}_2) \wedge \boldsymbol{r}_{O_2P}\,. \end{aligned}$$

□