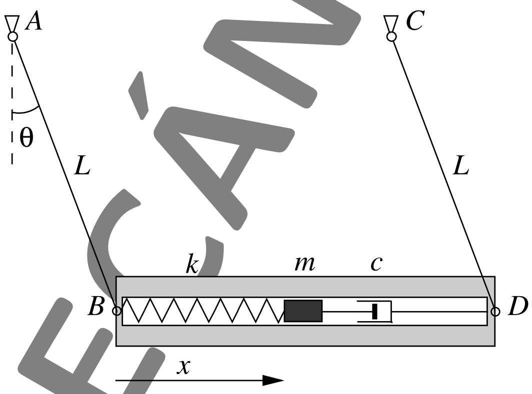
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (27 de noviembre de 2004)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

El sistema de la figura está formado por dos varillas AB y CD de longitud L, articuladas en sus extremos A y C a sendos puntos fijos, y en sus extremos B y D a un bastidor (ver figura). El bastidor tiene una ranura en la que se mueve sin rozamiento un oscilador lineal formado por una masa m, un resorte de rigidez k y un amortiguador viscoso de constante c. En el instante inicial la masa m se encuentra en reposo relativo al bastidor y las varillas AB y CD son perpendiculares a dicho bastidor. Se pide:



1. Considerando que las varillas giran con un movimiento impuesto $\theta = \theta(t)$ obtener la velocidad y la aceleración absoluta de la masa m.
2. Suponiendo ahora que las varillas giran con velocidad angular $\dot{\theta} = \Omega$ constante, obtener:
   a) Ecuación diferencial del movimiento de la partícula en el bastidor.
   b) Integrar la ecuación diferencial obtenida en el apartado anterior, expresando claramente las soluciones correspondientes al régimen transitorio y al régimen permanente.
   c) Obtener el valor de la velocidad angular Ω que hace máxima la amplitud del régimen permanente.

1.— Llamaremos $\boldsymbol{u}_r$ al versor de dirección según AB y $\boldsymbol{u}_\theta$ al versor de dirección perpendicular a AB en el sentido correspondiente al ángulo θ creciente. Asimismo $\boldsymbol{i}$ es el versor de dirección de la ranura (horizontal) y $\boldsymbol{j}$ el de la vertical ascendente. La velocidad y aceleración de la masa m las obtendremos por composición de movimientos:

$$\boldsymbol{v}_{\text{abs}} = \boldsymbol{v}_{\text{arr}} + \boldsymbol{v}_{\text{rel}}, \qquad \boldsymbol{a}_{\text{abs}} = \boldsymbol{a}_{\text{arr}} + \boldsymbol{a}_{\text{rel}} + \boldsymbol{a}_{\text{cor}} \tag{1}$$

Los términos de arrastre corresponden a la velocidad y aceleración del punto del bastidor que coincide con la masa puntual. Como el bastidor tiene un movimiento de traslación circular, la velocidad y la aceleración de todos sus puntos es la misma, y la aceleración de Coriolis es nula:

$$\boldsymbol{v}_{\text{arr}} = \dot{\theta} L \boldsymbol{u}_\theta, \quad \boldsymbol{a}_{\text{arr}} = -\dot{\theta}^2 L \boldsymbol{u}_r + \ddot{\theta} L \boldsymbol{u}_\theta, \quad \boldsymbol{a}_{\text{cor}} = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

Los términos relativos corresponden al movimiento de la partícula en la ranura:

$$\boldsymbol{v}_{\text{rel}} = \dot{x}\boldsymbol{i} = \dot{x}(\operatorname{sen}\theta \boldsymbol{u}_r + \cos\theta \boldsymbol{u}_\theta), \quad \boldsymbol{a}_{\text{rel}} = \ddot{x}\boldsymbol{i} = \ddot{x}(\operatorname{sen}\theta \boldsymbol{u}_r + \cos\theta \boldsymbol{u}_\theta) \tag{3}$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1) resulta:

$$\boldsymbol{v}_{\text{abs}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{\theta} L \boldsymbol{u}_\theta = \dot{x}\operatorname{sen}\theta \boldsymbol{u}_r + (\dot{\theta} L + \dot{x}\cos\theta)\boldsymbol{u}_\theta \tag{4}$$

$$\boldsymbol{a}_{\text{abs}} = \ddot{x}\boldsymbol{i} - \dot{\theta}^2 L \boldsymbol{u}_r + \ddot{\theta} L \boldsymbol{u}_\theta = (-\dot{\theta}^2 L + \ddot{x}\operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{u}_r + (\ddot{\theta} L + \ddot{x}\cos\theta)\boldsymbol{u}_\theta \tag{5}$$

2.— Para obtener la ecuación diferencial pedida planteamos el balance de la cantidad de movimiento en dirección de la ranura, teniendo en cuenta que ahora $\dot{\theta} = \Omega$ y $\ddot{\theta} = 0$:

$$m\boldsymbol{a}_{\text{abs}} \cdot \boldsymbol{i} = -kx - c\dot{x} \Rightarrow \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m\Omega^2 L \operatorname{sen}(\Omega t) \tag{6}$$

La solución de esta ecuación diferencial se puede expresar como suma de la solución de la ecuación diferencial homogénea:

$$x_h(t) = e^{-\frac{c\,t}{2\,m}} \left(P \text{ sen} \left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}\, t \right) + Q \text{ cos} \left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}\, t \right) \right) \tag{7}$$

y una solución particular de la ecuación diferencial completa:

$$x_p(t) = A \operatorname{sen}(\Omega t + \delta) \tag{8}$$

siendo:

$$\tan\delta = -\frac{c\Omega}{k - m\Omega^2}, \quad A = \frac{m\Omega^2 L}{\pm\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}} \tag{9}$$

La solución de régimen transitorio es:

$$x_{\text{tran}}(t) = e^{-\frac{c\,t}{2\,m}} \left(P \text{ sen} \left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}\, t \right) + Q \text{ cos} \left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}\, t \right) \right) + A \operatorname{sen}(\Omega t + \delta) \tag{10}$$

y la solución de régimen permanente es (8) Las constantes P y Q se obtienen imponiendo las condiciones iniciales $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$ en (10), resultando:

$$Q = -A \operatorname{sen}\delta \tag{11}$$

$$P = \frac{A}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}} \left(\frac{c}{2m} \operatorname{sen}\delta + \Omega\cos\delta \right) \tag{12}$$

Finalmente, el valor de Ω que hace máxima la amplitud de régimen permanente se obtiene derivando A respecto de Ω en (9), igualando a cero, y resolviendo:

$$\frac{dA}{d\Omega} = 0 \Rightarrow 2m\Omega L \left((k - m\Omega^2)^2 - c^2\Omega^2 \right) + m\Omega^2 L \left((k - m\Omega^2) 2m\Omega + c^2\Omega \right) = 0$$

$$\Rightarrow \Omega = \frac{k}{\sqrt{km + \frac{c^2}{2}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2\xi^2}} \tag{13}$$

siendo:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \xi = \frac{c}{2m\omega_0} \tag{14}$$