Mecánica

EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTRAORDINARIO (25 de enero de 2005)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 10/30 ó 7,5/45) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

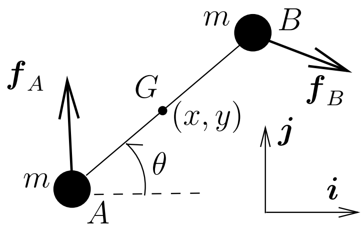
Enunciar el principio de D'Alembert para la dinámica de un sistema de partículas $\{m_i, i = 1 \dots N\}$, sometidas en general a ligaduras lisas. *Aplicar* al caso de dos partículas de igual masa m unidas por una varilla inextensible sin masa de longitud ℓ, en movimiento plano y sometidas a fuerzas externas cualesquiera. (5 ó 7,5/2 ptos.)

En un sistema material sometido a enlaces lisos, la evolución dinámica del sistema está determinada, como condición necesaria y suficiente, por la anulación en todo instante del trabajo de las fuerzas aplicadas más el trabajo de las fuerzas de inercia para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces:

$$\boxed{\sum_i \boldsymbol{f}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i - \sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0, \; \forall \{\delta \boldsymbol{r}_i\} \text{ comp.}}$$

En la expresión anterior las fuerzas $\boldsymbol{f}_i$ no incluyen las reacciones de los enlaces lisos, que no desarrollan trabajo virtual.

Aplicación.— El sistema pedido posee tres grados de libertad, que describiremos mediante las coordenadas (x, y) del centro de masas G y el ángulo θ que forma la varilla con la horizontal. La expresión del principio de D'Alembert es:



$$\boldsymbol{f}_A \cdot \delta \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{f}_B \cdot \delta \boldsymbol{r}_B - m \ddot{\boldsymbol{r}}_A \cdot \delta \boldsymbol{r}_A - m \ddot{\boldsymbol{r}}_B \cdot \delta \boldsymbol{r}_B = 0$$

Desarrollando esta expresión:

$$\boldsymbol{r}_A = \left(x - \frac{\ell}{2}\cos\theta\right)\boldsymbol{i} + \left(y - \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta\right)\boldsymbol{j}; \quad \boldsymbol{r}_B = \left(x + \frac{\ell}{2}\cos\theta\right)\boldsymbol{i} + \left(y + \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta\right)\boldsymbol{j};$$

$$\delta\boldsymbol{r}_A = \left(\delta x + \frac{\ell\delta\theta}{2}\operatorname{sen}\theta\right)\boldsymbol{i} + \left(\delta y - \frac{\ell\delta\theta}{2}\cos\theta\right)\boldsymbol{j}; \quad \delta\boldsymbol{r}_B = \left(\delta x - \frac{\ell\delta\theta}{2}\operatorname{sen}\theta\right)\boldsymbol{i} + \left(\delta y + \frac{\ell\delta\theta}{2}\cos\theta\right)\boldsymbol{j};$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_A = \left(\ddot{x} + \frac{\ddot{\theta}\ell}{2}\operatorname{sen}\theta + \frac{\dot{\theta}^2\ell}{2}\cos\theta\right)\boldsymbol{i} + \left(\ddot{y} - \frac{\ddot{\theta}\ell}{2}\cos\theta + \frac{\dot{\theta}^2\ell}{2}\operatorname{sen}\theta\right)\boldsymbol{j};$$

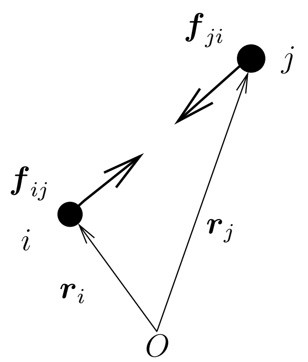
$$\ddot{\boldsymbol{r}}_B = \left(\ddot{x} - \frac{\ddot{\theta}\ell}{2}\operatorname{sen}\theta - \frac{\dot{\theta}^2\ell}{2}\cos\theta\right)\boldsymbol{i} + \left(\ddot{y} + \frac{\ddot{\theta}\ell}{2}\cos\theta - \frac{\dot{\theta}^2\ell}{2}\operatorname{sen}\theta\right)\boldsymbol{j};$$

$$(f_A^x + f_B^x - 2m\ddot{x})\delta x + (f_A^y + f_B^y - 2m\ddot{y})\delta y + \left[(f_A^x - f_B^x)\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta - (f_A^y - f_B^y)\frac{\ell}{2}\cos\theta - m\frac{\ell^2\ddot{\theta}}{2}\right]\delta\theta = 0\,.$$

Considerando que $(\delta x, \delta y, \delta\theta)$ son arbitrarios se deduce finalmente:

$$f_A^x + f_B^x = 2m\ddot{x}\,; \quad f_A^y + f_B^y = 2m\ddot{y}\,; \quad (f_A^x - f_B^x)\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta - (f_A^y - f_B^y)\frac{\ell}{2}\cos\theta = m\frac{\ell^2\ddot{\theta}}{2}\,.$$

Estudiar el efecto de las fuerzas interiores en un sistema sobre la conservación o ecuaciones de balance de las magnitudes siguientes: *cantidad de movimiento, momento cinético y energía cinética*. *Indicar* en concreto de forma razonada en qué tipo de sistemas se pueden ignorar dichas fuerzas interiores en los tres casos. *Aplicar* al mismo caso de la pregunta anterior, estudiando el efecto de la fuerza de ligadura debida a la varilla. (5 ó 7,5/2 ptos.)



Se considera un sistema formado por un número finito de partículas, $\{m_i,\, i = 1, \cdots N\}$. Admitimos que se cumple la ley de acción y reacción en su enunciado más fuerte: no sólo que las fuerzas son iguales y opuestas, sino que se supone que son fuerzas centrales que están alineadas con la misma recta que une cada una de las partículas:

$$\boldsymbol{f}_{ij} = f_{ij}\frac{\boldsymbol{r}_{ij}}{r_{ij}} \qquad (\text{con } \boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i, r_{ij} = |\boldsymbol{r}_{ij}|)\,.$$

Según la hipótesis anterior la resultante y el momento de cada pareja de fuerzas internas $(\boldsymbol{f}_{ij}, \boldsymbol{f}_{ji})$ se cancelan, por lo que constituyen un sistema nulo:

$$\sum_i \left(\sum_{j\neq i} \boldsymbol{f}_{ij}\right) = \boldsymbol{0}\,; \qquad \sum_i \boldsymbol{r}_i \wedge \left(\sum_{j\neq i} \boldsymbol{f}_{ij}\right) = \boldsymbol{0}\,.$$

En consecuencia las fuerzas interiores no juegan ningún papel en las ecuaciones de balance de la cantidad de movimiento ni del momento cinético:

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i^{\text{ext}} = M\ddot{\boldsymbol{r}}_G\,; \qquad \sum_i \boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{F}_i^{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t}\,.$$

Sin embargo para un sistema general el trabajo de las fuerzas interiores no se anula:

$$\mathrm{d}W^{\text{int}} = \sum_{i,j}(\boldsymbol{f}_{ij}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{f}_{ji}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_j) = -\sum_{i,j}\boldsymbol{f}_{ij}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{ij} \neq 0\,. \tag{1}$$

En consecuencia el principio de la energía cinética indica simplemente que la variación de la misma coincide con el trabajo realizado por todas las fuerzas, considerando en general tanto las interiores como las exteriores:

$$\mathrm{d}T = \mathrm{d}W^{\text{ext}} + \mathrm{d}W^{\text{int}}\,.$$

En los sólidos rígidos sí se verifica que el trabajo de las fuerzas interiores es siempre nulo, ya que puede demostrarse que el trabajo de cada pareja de fuerzas interiores entre dos partículas cualesquiera se anula. La contribución de una pareja cualquiera es precisamente la misma que la pedida en la aplicación propuesta en el enunciado, dos partículas sometidas a una ligadura de distancia constante, que a continuación se desarrolla.

Aplicación.— se consideran dos partículas (m_A, m_B) unidas por una varilla sin masa, que simplemente impone una restricción de distancia constante. Emplearemos el versor $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}_{AB}/r_{AB}$, según la dirección de la varilla. Las reacciones asociadas a esta restricción están dirigidas según la varilla, denominando su magnitud como N serían: $\boldsymbol{f}_{AB} = N\,\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{f}_{BA} = -N\,\boldsymbol{u}$. La cinemática del sólido rígido indica que $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{AB} = \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\wedge\boldsymbol{r}_{AB} = \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\wedge(r_{AB}\,\boldsymbol{u})$, vector que es evidentemente perpendicular a $\boldsymbol{u}$ y por consiguiente a las reacciones anteriormente expresadas. En consecuencia, el trabajo elemental que expresa (1) es nulo, como queríamos probar.

Este tipo de ligadura se denomina lisa, ya que las reacciones no desarrollan trabajo. Es interesante observar, sin embargo, que el trabajo que produce sobre cada una de las partículas no es nulo: $\mathrm{d}W^A = N\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A \neq 0$. La suma sí es nula $(\mathrm{d}W^A + \mathrm{d}W^B = N\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A - N\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_B = -N\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{AB} = 0)$, pero cada uno de los sumandos en general no lo es. En este sentido difieren de los enlaces debidos a apoyos lisos, en las cuales la reacción es perpendicular al desplazamiento de su punto de aplicación.