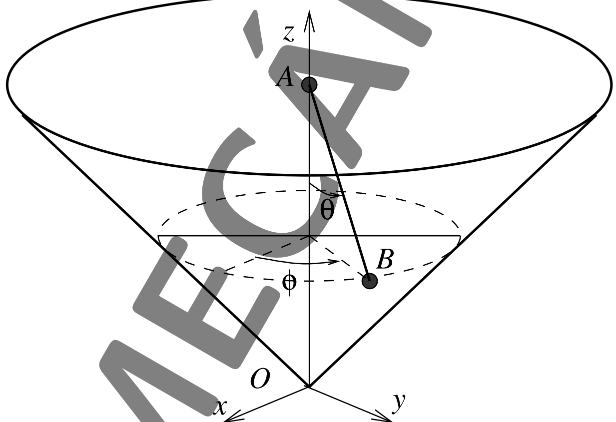
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (25 de enero de 2005)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Se considera un sistema rígido formado por dos partículas pesadas A y B de masa m cada una, unidas por una varilla inextensible sin masa de longitud ℓ. La partícula A se mueve sobre el eje Oz vertical, mientras que B permanece sobre un cono fijo de eje Oz y semiángulo $\pi/4$, siendo ambas ligaduras lisas y bilaterales. Para estudiar el movimiento se considerarán las coordenadas (ϕ, θ) de la figura adjunta, tomando como condiciones iniciales $(\phi_0 = 0, \theta_0, \dot{\phi}_0, \dot{\theta}_0 = 0)$.



Se pide:

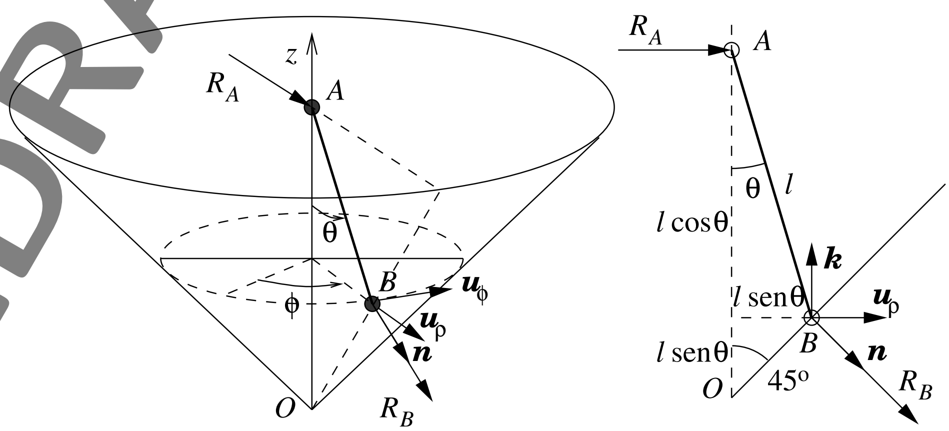
1. Obtener las ecuaciones de la dinámica que expresan el balance de la cantidad de movimiento del sistema.

2. Obtener las ecuaciones de la dinámica que expresan el balance del momento cinético en O del sistema. Estudiar si se conserva la proyección del mismo respecto de algún eje.

3. Obtener la expresión de la reacción del cono sobre B en función de los grados de libertad y sus derivadas.

4. Razonar si se conserva la energía y obtener en su caso la expresión de la misma.

1.— Para describir la configuración del sistema emplearemos las coordenadas (θ, ϕ), que definen los dos grados de libertad del sistema. En función de estas la coordenada z de A vale $z_A = \ell \operatorname{sen}\theta + \ell\cos\theta$, y las de B son $z_B = \ell \operatorname{sen}\theta$, $\rho_B = \ell \operatorname{sen}\theta$. Emplearemos las direcciones de coordenadas polares definidas por el triedro físico $(\boldsymbol{u}_\rho, \boldsymbol{u}_\phi, \boldsymbol{k})$. Asimismo emplearemos el versor normal al cono $\boldsymbol{n} = (1/\sqrt{2})(\boldsymbol{u}_\rho - \boldsymbol{k})$. Las reacciones externas son $R_A\,\boldsymbol{u}_\rho$, $R_B\,\boldsymbol{n}$, mientras que la varilla produce asimismo una reacción interna alineada con la misma. La velocidad y aceleración de cada partícula vale



$$\boldsymbol{v}_A = \dot{z}_A\,\boldsymbol{k} = \ell\dot{\theta}(-\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)\,\boldsymbol{k}\,,$$
$$\boldsymbol{v}_B = \ell\dot{\theta}\cos\theta\,\boldsymbol{u}_\rho + \ell\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u}_\phi + \ell\dot{\theta}\cos\theta\,\boldsymbol{k}\,. \qquad (1)$$

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}_A = \ddot{z}_A\,\boldsymbol{k} = \Big[\ell\ddot{\theta}(-\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) - \ell\dot{\theta}^2(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\Big]\,\boldsymbol{k}\,,\\
&\boldsymbol{a}_B = \ell(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta - \dot{\phi}^2\operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{u}_\rho + \ell(2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + \ddot{\phi}\operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{u}_\phi + \ell(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{k}\,.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Empleando las expresiones de las aceleraciones (2) y las proyecciones de las fuerzas se obtienen las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento:

$$
\begin{aligned}
R_A + \frac{R_B}{\sqrt{2}} &= m\ell(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta - \dot{\phi}^2\operatorname{sen}\theta)\\
0 &= m\ell(2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + \ddot{\phi}\operatorname{sen}\theta)\\
-2mg - \frac{R_B}{\sqrt{2}} &= m\Big[\ell\ddot{\theta}(-\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) - \ell\dot{\theta}^2(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\Big] + m\ell(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta)\,.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

2.— La expresión del momento cinético es

$$
\boldsymbol{H}_O = \cancel{\boldsymbol{r}_A \wedge m\boldsymbol{v}_A} + \boldsymbol{r}_B \wedge m\boldsymbol{v}_B = -m\ell^2\dot{\phi}\operatorname{sen}^2\theta\,\boldsymbol{u}_\rho + m\ell^2\dot{\phi}\operatorname{sen}^2\theta\,\boldsymbol{k}\,. \tag{4}
$$

El momento de las fuerzas (exteriores) vale

$$
\boldsymbol{M}_O = \Big[\ell(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)R_A + \ell\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta R_B + \ell mg\operatorname{sen}\theta\Big]\,\boldsymbol{u}_\phi\,. \tag{5}
$$

Observamos que no hay componente de $\boldsymbol{M}_O$ en la dirección del eje Oz, por lo que el momento cinético según el mismo se conserva:

$$
H_z = \boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{k} = m\ell^2\dot{\phi}\operatorname{sen}^2\theta = m\ell^2\dot{\phi}_0\operatorname{sen}^2\theta_0 \quad \text{(cte.)} \tag{6}
$$

Asimismo comprobamos que la derivada de esta ecuación equivale a la ecuación anterior $(3)_2$.

Tampoco hay componente de $\boldsymbol{M}_O$ según la dirección $\boldsymbol{u}_\rho$, pero al tratarse de un eje móvil, de ello no se deduce necesariamente la conservación correspondiente.

La derivada de $\boldsymbol{H}_O$ se obtiene derivando directamente las componentes en cilíndricas y añadiendo el término complementario de derivación (que proviene de $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\boldsymbol{u}_\rho = \dot{\phi}\,\boldsymbol{u}_\phi$), resultando

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_O = -(m\ell^2\ddot{\phi}\operatorname{sen}^2\theta + 2m\ell^2\dot{\phi}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\boldsymbol{u}_\rho - m\ell^2\dot{\phi}^2\operatorname{sen}^2\theta\,\boldsymbol{u}_\phi&\\
+ (m\ell^2\ddot{\phi}\operatorname{sen}^2\theta + 2m\ell^2\dot{\phi}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\boldsymbol{k}&
\end{aligned}
\tag{7}
$$

De (5) y (7) resultan las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
&m\ell^2\ddot{\phi}\operatorname{sen}^2\theta + 2m\ell^2\dot{\phi}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0\\
&-m\ell^2\dot{\phi}^2\operatorname{sen}^2\theta = \ell(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)R_A + \ell\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta R_B + \ell mg\operatorname{sen}\theta\\
&m\ell^2\ddot{\phi}\operatorname{sen}^2\theta + 2m\ell^2\dot{\phi}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Observamos que las ecuaciones $(8)_1$ y $(8)_3$ son idénticas, equivaliendo ambas a la derivada de (6). La única ecuación que aporta información nueva es $(8)_2$.

3.— La reacción pedida se obtiene inmediatamente despejando en $(3)_3$:

$$
\frac{R_B}{\sqrt{2}} = -2mg - m\Big[\ell\ddot{\theta}(-\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) - \ell\dot{\theta}^2(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\Big] - m\ell(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta)\,. \tag{9}
$$

Empleando ésta podría despejarse análogamente R_A de $(3)_1$, y eliminar ambas reacciones en $(8)_2$, con lo que se obtendría una ecuación diferencial que, añadida a (6), definiría la dinámica del sistema. Puede comprobarse que estas dos ecuaciones coinciden con las de Lagrange.

4.— Todas las fuerzas son conservativas, por tanto se conserva la energía $E = T + V$:

$$
E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2(-\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\left(2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \dot{\phi}^2\operatorname{sen}^2\theta\right) + mg\ell(2\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)\,. \tag{10}
$$