Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (25 de enero de 2005)

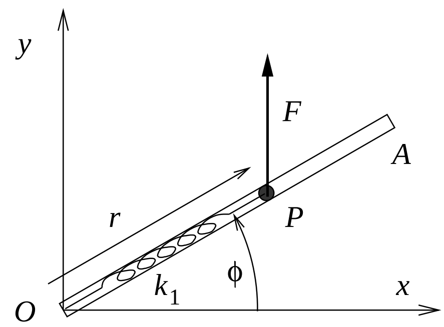
Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

El sistema material de la figura, situado en un plano horizontal Oxy, está compuesto por:

a) varilla OA articulada en el punto fijo O;

b) punto material P que desliza libremente por la varilla.



El punto P está unido a O mediante un resorte elástico de longitud natural nula y constante k_1. Adicionalmente, actúa sobre P una fuerza de valor constante F en la dirección del eje y. Sobre la varilla actúa una fuerza atractiva por unidad de longitud de la misma desde el eje Ox, proporcional al cuadrado de la distancia con constante k_2. Es decir, para un elemento de longitud dξ esta fuerza vale

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f} = -k_2 y(\xi)^2 \mathrm{d}\xi\, \boldsymbol{j}\,.$$

Se admitirá que la barra permanece en el cuadrante Ox^+y^+, es decir $0 \leq \phi \leq \pi/2$.

Se pide:

1. Ecuaciones que definen las condiciones de equilibrio.
2. Obtener las posiciones de equilibrio para los valores $k_1 = 8F/a$, $k_2 = F/a^3$.
3. Reacción de la varilla sobre la partícula para las posiciones de equilibrio que cumplan $0 < \phi < \pi/2$.
4. Estudiar la estabilidad de todas las posiciones de equilibrio obtenidas en el punto 2.

1.- Una forma de obtener las ecuaciones de equilibrio es calcular el potencial de todas las fuerzas activas, que son la fuerza F, la fuerza del muelle y la fuerza atractiva que actúa sobre la varilla.

Tomando como coordenadas generalizadas la distancia de la partícula al origen (r) y el ángulo que forma la varilla con el eje x (ϕ), el potencial de la fuerza F y de la fuerza del muelle tienen la expresión:

$$V_F = -Fr\,\mathrm{sen}\,\phi \quad , \qquad V_{muelle} = \frac{1}{2}k_1 r^2 \tag{1}$$

El potencial de la fuerza atractiva sobre la varilla puede calcularse integrando el potencial asociado a un elemento diferencial de longitud de ésta, teniendo en cuenta que $y(\xi) = \xi\,\mathrm{sen}\,\phi$:

$$\mathrm{d}V_f = \frac{1}{3}k_2 y(\xi)^3 \mathrm{d}\xi \qquad \Longrightarrow \qquad V_f = \frac{1}{12}k_2 a^4\,\mathrm{sen}^3\,\phi \tag{2}$$

Sumando las expresiones (1) y (2) se obtiene el potencial total:

$$V = -Fr\,\mathrm{sen}\,\phi + \frac{1}{2}k_1 r^2 + \frac{1}{12}k_2 a^4\,\mathrm{sen}^3\,\phi \tag{3}$$

Derivando (3) respecto de r y ϕ se obtienen dos ecuaciones que definen las condiciones de equilibrio:

$$-F \operatorname{sen}\phi + k_1 r = 0 \tag{4}$$

$$-Fr\cos\phi + \frac{1}{4}k_2 a^4 \cos\phi \operatorname{sen}^2\phi = 0 \tag{5}$$

2.- En (5) se puede sacar factor común a $\cos\phi$, lo que proporciona una primera posición de equilibrio (con $0 \leq \phi \leq \pi/2$ y con el valor de k_1 especificado en el enunciado):

$$\cos\phi = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \phi_1 = \frac{\pi}{2} \quad , \quad r_1 = \frac{F}{k_1} = \frac{a}{8}$$

Eliminando esta solución de (5) y combinando la expresión resultante con (4) se obtiene la ecuación:

$$\frac{F^2 \operatorname{sen}\phi}{k_1} - \frac{1}{4}k_2 a^4 \operatorname{sen}^2\phi = 0$$

que proporciona dos posiciones de equilibrio:

$$\begin{array}{rcll} \operatorname{sen}\phi = 0 & \Longrightarrow & \phi_2 = 0 \quad , & r_2 = 0 \\ \operatorname{sen}\phi = \dfrac{F^2/k_1}{(1/4)k_2 a^4} = \dfrac{1}{2} & \Longrightarrow & \phi_3 = \dfrac{\pi}{6} \quad , & r_3 = \dfrac{a}{16} \end{array}$$

3.- La única posición que cumple el requisito especificado en este apartado es $\phi = \pi/6$. Estableciendo el equilibrio de fuerzas sobre la partícula, teniendo en cuenta que la reacción buscada (N) es perpendicular a la varilla, se obtiene:

$$N = -F\cos\phi \qquad \Longrightarrow \qquad N = -F\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{6}$$

4.- Estudiamos la estabilidad a través de la matriz Hessiana, que tiene la expresión:

$$H = \begin{pmatrix} k_1 & -F\cos\phi \\ -F\cos\phi & -Fr\operatorname{sen}\phi + \frac{1}{4}k_2 a^4 \operatorname{sen}\phi(2 - 3\operatorname{sen}^2\phi) \end{pmatrix} \tag{7}$$

Para que una determinada posición de equilibrio sea estable, esta matriz debe ser definida positiva, para lo que debe cumplirse:

$$k_1 > 0 \qquad ; \qquad k_1 \left[\frac{1}{4}k_2 a^4 \operatorname{sen}\phi(2 - 3\operatorname{sen}^2\phi) - Fr\operatorname{sen}\phi\right] - F^2\cos^2\phi > 0 \tag{8}$$

La primera de las condiciones expresadas en (8) se cumple siempre; la segunda toma la forma, después de sustituir k_1 y k_2 por los valores especificados:

$$p(r,\phi) = 2\operatorname{sen}\phi(2 - 3\operatorname{sen}^2\phi) - \frac{8r}{a}\operatorname{sen}\phi - \cos^2\phi > 0 \tag{9}$$

Puede comprobarse fácilmente que:

$$\begin{array}{rl} p(r_1,\phi_1) = -3 < 0 & \text{Inestable} \\ p(r_2,\phi_2) = -1 < 0 & \text{Inestable} \\ p(r_3,\phi_3) = 1/4 > 0 & \text{Estable} \end{array}$$