Mecánica

3.er EXAMEN PARCIAL (2 de abril del 2005)

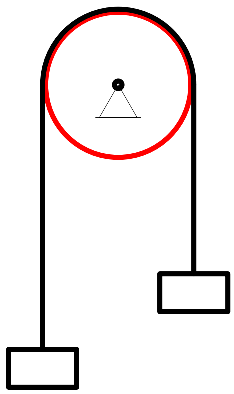
Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Deducir las expresiones de los principios de cantidad de movimiento y momento cinético aplicados a un sistema de masa variable compuesto de N partículas $m_i,\ i = 1, 2, \ldots N$ suponiendo que la velocidad relativa de la masa que cada partícula pierde o incorpora ($\boldsymbol{v}_{rel}$) es igual para todas ellas.

Aplicar estos conceptos a un sistema mecánico compuesto por dos bloques unidos por un hilo de masa despreciable a través de una polea sin masa, como muestra la figura adjunta. Ambos bloques tienen inicialmente una masa m_0. El de la izquierda es un recipiente que contiene arena, que comienza a perderla a razón constante q en unidades de masa por unidad de tiempo y con velocidad constante v_0 respecto del recipiente. Obtener la ecuación diferencial del movimiento del bloque derecho. (5 ptos.)



La ecuación fundamental de la dinámica de una partícula de masa variable es

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} + \boldsymbol{F}\,, \tag{1}$$

siendo $\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}$ la velocidad relativa con la que se incorpora o pierde masa. En el caso de un sistema de partículas, para la cantidad de movimiento efectuamos la suma para el conjunto:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} + \boldsymbol{F}_i\right) \quad \Rightarrow \quad M\boldsymbol{a}_G = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} + \boldsymbol{F}\,, \tag{2}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}$ es igual para todas. Por lo que vemos el centro de masa se mueve con la misma ecuación que la partícula (**??**).

Por lo que se refiere al momento cinético, tenemos

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \wedge \left(\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} + \boldsymbol{F}_i\right) = \boldsymbol{M}_O + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \wedge \frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} \tag{3}$$

que no puede simplificarse más.

Aplicación: si llamamos F a la tensión del hilo, las ecuaciones del movimiento de los bloques de la derecha y de la izquierda serían respectivamente:

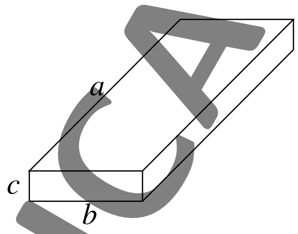
$$m_0\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m_0 g - F$$

$$(m_0 - qt)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = qv_0 + F - (m_0 - qt)g\,.$$

De la segunda ecuación despejamos F y la sustituimos en la primera:

$$(2m_0 - qt)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = q(v_0 + gt)\,.$$

Se considera un sólido rígido en movimiento libre y sin acciones exteriores, con un estado de velocidad inicial determinado $(\boldsymbol{v}_G, \boldsymbol{\Omega})$. *Deducir* las condiciones para que el eje de la velocidad de rotación sea constante a lo largo del tiempo (eje permanente de rotación). *Razonar* si en este caso se conservará o no el módulo de dicha velocidad de rotación. *Expresar* las condiciones de estabilidad de dicho movimiento. *Aplicación:* Se considera un ladrillo de lados $a > b > c$. Dibujar en la figura los ejes permanentes de rotación estables. (5 ptos.)



Sea $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \boldsymbol{e}$, con $\boldsymbol{e}$ un vector unitario, que en la hipótesis del enunciado será constante. Si no hay acciones exteriores, se conservará la energía cinética, por lo que

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}I_e\Omega^2 = \text{cte.}\,,$$

siendo $I_e = \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{e}$, momento de inercia respecto del eje (G, e). Al ser este constante se deduce que el módulo Ω también será constante, por lo que el vector velocidad angular se conserva: $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{cte}$.

El momento cinético se debe conservar también, al no haber acciones externas, por lo que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{I}_G\cdot\cancel{\dot{\boldsymbol{\Omega}}} + \boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{0}\,.$$

Se deduce entonces que $\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega}$ debe ser paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$, es decir que la dirección $\boldsymbol{e}$ de $\boldsymbol{\Omega}$ debe coincidir con una de las direcciones principales de inercia en G.

Puede demostrarse que de los tres ejes principales sólo se mantienen estables los que tengan el momento de inercia mínimo o máximo, siendo inestable el de momento intermedio.

Aplicación: siendo $a < b < c$, el momento de inercia máximo es el paralelo a la arista de longitud c, y el mínimo el paralelo a la de longitud a, con lo que los ejes estables serán: