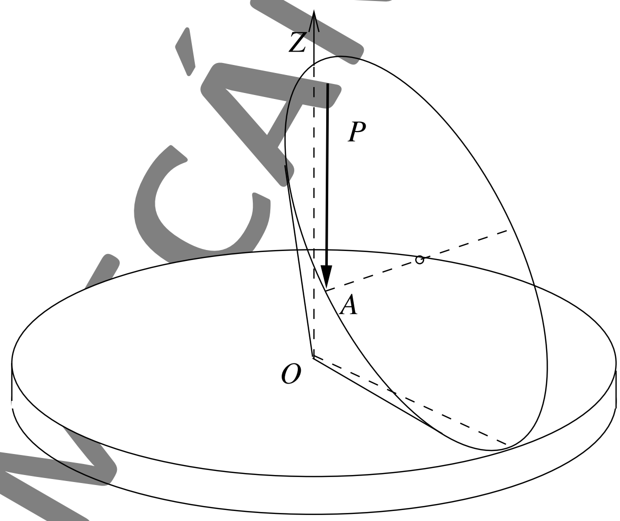
Mecánica

3..er EXAMEN PARCIAL (2 de abril del 2005)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Se considera un cono de revolución sólido de semiángulo cónico α, masa m y radio de la base a, apoyado mediante una generatriz sobre una plataforma circular de masa M y radio R sobre la que puede rodar sin deslizar, estando el vértice del cono en el centro O de la plataforma. La plataforma se mantiene horizontal pudiendo girar libremente alrededor de su eje vertical OZ. En un instante determinado el cono y la plataforma se encuentran en reposo y se aplica una percusión vertical P en el punto A situado en el extremo de un diámetro horizontal de la base del cono. Se pide:



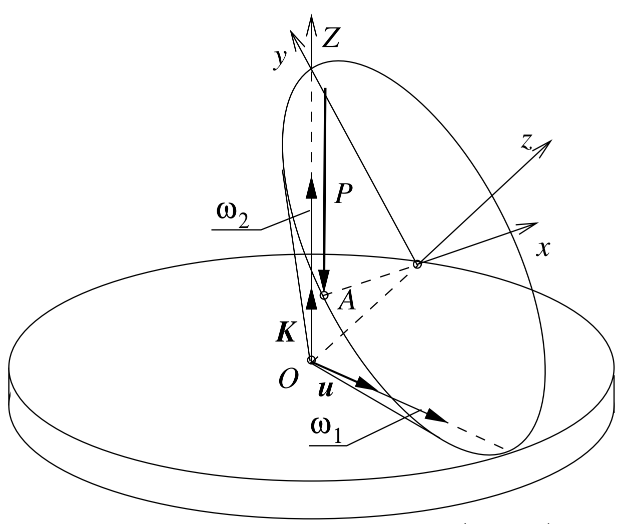
1. Obtener las ecuaciones que definen el campo de velocidades de ambos sólidos inmediatamente después de la percusión. Particularizar las ecuaciones obtenidas para $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, $m = M$, y $R = a\sqrt{2}$.

2. Obtener el campo de velocidades de los dos sólidos después de la percusión para este caso.

3. Obtener las reacciones impulsivas que se producen en el punto O de la plataforma (fuerzas y momentos).

Nota: Los momentos principales de inercia de un cono de altura h y radio a de la base respecto de su vértice son $A = \dfrac{3}{20}m(a^2 + 4h^2)$ y $C = \dfrac{3}{10}ma^2$

1.— El movimiento del cono respecto de la plataforma después de la impulsión será una rotación ω_1 alrededor de la generatriz, definida por el versor $\boldsymbol{u}$. A su vez, la plataforma girará con una velocidad de rotación $\omega_2\,\boldsymbol{K}$. Por tanto, la velocidad de rotación del cono será $\omega_1\,\boldsymbol{u} + \omega_2\,\boldsymbol{K}$. Bastará obtener ω_1 y ω_2 para determinar el campo de velocidades.



Obtendremos una primera ecuación mediante el balance de momento cinético en O según la dirección $\boldsymbol{u}$, teniendo en cuenta que las reacciones de la plataforma sobre el cono se aplican en la generatriz y no producen momento en ella:

$$\boldsymbol{H}_{O,\text{cono}} \cdot \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{r}_{OA} \wedge \boldsymbol{P}) \cdot \boldsymbol{u} \qquad (1)$$

En los ejes $Oxyz$ las componentes del tensor de inercia del cono en O serían $\boldsymbol{I}_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$. Por su parte, los versores se expresan como $\boldsymbol{K} = \cos\alpha\,\boldsymbol{j} + \operatorname{sen}\alpha\,\boldsymbol{k}$, y $\boldsymbol{u} = -\operatorname{sen}\alpha\,\boldsymbol{j} + \cos\alpha\,\boldsymbol{k}$.

El momento impulsivo es

$$\boldsymbol{r}_{OA} \wedge \boldsymbol{P} = aP\,\boldsymbol{u} + hP\cos\alpha\,\boldsymbol{i}\,, \tag{2}$$

siendo h la altura del cono. Con estos resultados la expresión (1) arroja:

$$\omega_1\left(A\,\text{sen}^2\alpha + C\cos^2\alpha\right) + \omega_2(C-A)\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha = aP \tag{3}$$

Otra ecuación que plantearemos será el balance del momento cinético en la dirección del eje OZ, para el conjunto plataforma+cono:

$$(\boldsymbol{H}_{O,\text{cono}} + \boldsymbol{H}_{O,\text{disco}})\cdot\boldsymbol{K} = \boldsymbol{0}\,,$$

que desarrollando resulta:

$$\omega_1(C-A)\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + \omega_2\left(A\cos^2\alpha + C\,\text{sen}^2\alpha\right) + \frac{1}{2}MR^2\omega_2 = 0\,. \tag{4}$$

Particularizando las ecuaciones (3) y (4) con los datos del enunciado se obtiene

$$\frac{1}{2}\omega_1\frac{21}{20}ma^2 - \frac{1}{2}\omega_2\frac{9}{20}ma^2 = aP\,; \tag{5}$$

$$-\frac{1}{2}\omega_1\frac{9}{20}ma^2 + \frac{1}{2}\omega_2\frac{21}{20}ma^2 + \frac{1}{2}m(2a^2)\omega_2 = 0\,. \tag{6}$$

2.— Resolviendo las ecuaciones (5) y (6) se obtiene:

$$\omega_1 = \frac{61}{30}\frac{P}{ma}\,;\quad \omega_2 = \frac{3}{10}\frac{P}{ma}\,. \tag{7}$$

3.— Las reacciones exteriores en el apoyo O constan de una fuerza impulsiva $\boldsymbol{R}_O$ así como de un momento impulsivo $\boldsymbol{M}_O$ horizontal que impida la inclinación del plano de la plataforma. Considerando en primer lugar el balance de cantidad de movimiento para el sistema conjunto cono+plataforma:

$$\boldsymbol{R}_O - P\,\boldsymbol{K} = m\boldsymbol{v}_G = m(\omega_1\,\boldsymbol{u} + \omega_2\,\boldsymbol{K})\wedge\left(\frac{3}{4}a\,\boldsymbol{k}\right) \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{R}_O = P\,\boldsymbol{K} - \frac{13}{10\sqrt{2}}P\,\boldsymbol{i}\,.$$

El momento de reacción impulsivo sobre la plataforma se origina por la reacción impulsiva transmitida a través de la generatriz de contacto, cuya resultante vale precisamente $\boldsymbol{R}_O$. El momento producido por esta reacción debe ser perpendicular a la generatriz, por lo que dicho momento reactivo tendrá únicamente componente horizontal según la dirección $\boldsymbol{i}$. Estableciendo ahora el balance de momento cinético, el momento reactivo debe equilibrar al segundo sumando de (2):

$$\boldsymbol{M}_O = \frac{1}{\sqrt{2}}Pa\,\boldsymbol{i}\,.$$