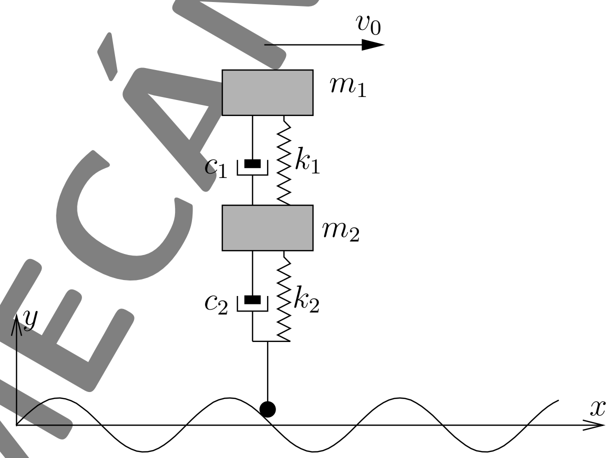
Mecánica

4.º EXAMEN PARCIAL Y EXAMEN FINAL (11 de junio del 2005)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30 ó 10/45) Tiempo: 60 min.

Para analizar el comportamiento dinámico de un vehículo se hace un modelo como el de la figura formado por dos masas suspendidas m_1 y m_2 que pueden oscilar únicamente en dirección vertical. Las suspensiones primaria y secundaria del vehículo se representan mediante amortiguadores y muelles lineales de constantes c_2, k_2 y c_1, k_1, respectivamente (ver figura). El vehículo recorre con velocidad horizontal constante v_0 una carretera representada por la senoide $y = A\,\mathrm{sen}(x/\lambda)$. Se pide:

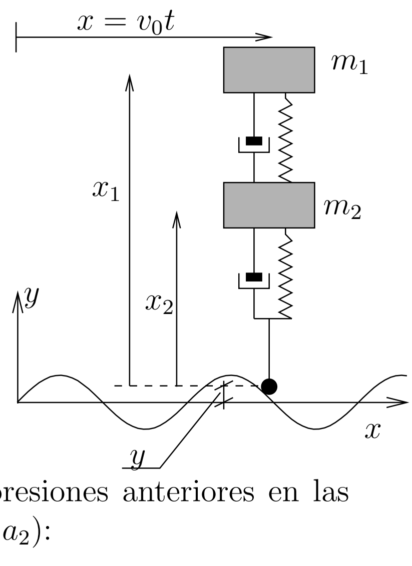


1. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Para los valores numéricos $m_1 = 8000$ kg, $m_2 = 2000$ kg, $k_1 = 2{\cdot}10^6$ N/m, $k_2 = 5{\cdot}10^6$ N/m, obtener:
   a) Frecuencias propias y modos de oscilación del vehículo.
   b) Suponiendo que las constantes de amortiguación son pequeñas ($c_1 = c_2 \approx 0$) pero suficientes para que se alcance un movimiento de régimen permanente al cabo del tiempo, obtener dicho movimiento cuando v_0/λ es el 90 % de la menor frecuencia propia del vehículo.

1.— Consideramos las coordenadas $\{x_1, x_2\}$ de cada una de las masas, relativas a la cota de la carretera, definida en función del tiempo por $y(t) = A\,\mathrm{sen}(v_0 t/\lambda)$. El cero de las coordenadas $\{x_1, x_2\}$ se sitúa en la posición natural bajo la carga gravitatoria estática. De esta forma, las aceleraciones (absolutas) de cada una de las masas serán

$$a_1 = \ddot{x}_1 + \ddot{y}\,; \quad a_2 = \ddot{x}_2 + \ddot{y}\,,$$

siendo $\ddot{y} = -A\,(v_0/\lambda)^2\,\mathrm{sen}\,(v_0 t/\lambda)$. Las fuerzas debidas a los resortes y amortiguadores sobre cada una de las masas son



$$f_1 = -k_1(x_1 - x_2) - c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\,;$$
$$f_2 = k_1(x_1 - x_2) + c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2 x_2 - c_2 \dot{x}_2\,.$$

Las ecuaciones del movimiento se obtienen sustituyendo las expresiones anteriores en las ecuaciones dinámicas elementales de cada masa ($f_1 = m_1 a_1,\ f_2 = m_2 a_2$):

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_1 x_2 + c_1\dot{x}_1 - c_1\dot{x}_2 = m_1 A\left(\frac{v_0}{\lambda}\right)^2 \mathrm{sen}\left(\frac{v_0 t}{\lambda}\right)\;;$$

$$m_2\ddot{x}_2 - k_1 x_1 + (k_1 + k_2)x_2 - c_1\dot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_2 = m_2 A\left(\frac{v_0}{\lambda}\right)^2 \mathrm{sen}\left(\frac{v_0 t}{\lambda}\right)\;.$$

Estas ecuaciones pueden escribirse de forma matricial como

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{f}(t)\}\,, \tag{1}$$

siendo

$$\{\mathbf{x}\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{f}(t)\} = A\left(\frac{v_0}{\lambda}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{v_0 t}{\lambda}\right)\begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix},$$
$$[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{C}] = \begin{pmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{pmatrix}.$$

2.— Las frecuencias y modos propios se obtienen considerando soluciones armónicas $\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{a}\}\operatorname{sen}\omega t$ para el problema de vibraciones libres sin amortiguamiento,

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{0}\}\,, \tag{2}$$

por lo que resulta

$$\left(-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]\right)\{\mathbf{a}\}\operatorname{sen}\omega t = \{\mathbf{0}\}\,. \tag{3}$$

Para que existan soluciones no triviales $\{\mathbf{a}\} \neq \{\mathbf{0}\}$ a esta ecuación homogénea la matriz de coeficientes debe ser singular, con lo que se llega a la denominada *ecuación característica del problema de autovalores*:

$$\begin{aligned} &\det\left(-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]\right) = 0\,, \\ &m_1 m_2 \omega^4 - (m_1(k_1 + k_2) + m_2 k_1)\omega^2 + k_1 k_2 = 0\,, \end{aligned} \tag{4}$$

y sustituyendo los valores numéricos del enunciado:

$$16 \cdot 10^6 \omega^4 - 60 \cdot 10^9 \omega^2 + 10 \cdot 10^{12} = 0\,. \tag{5}$$

Las soluciones (positivas) de esta ecuación son las frecuencias propias buscadas:

$$\boxed{\omega_1 = 13{,}2218\,\mathrm{rad/s}\,; \quad \omega_2 = 59{,}7928\,\mathrm{rad/s}\,.} \tag{6}$$

Los vectores propios o modos normales de vibración se obtienen para cada una de las frecuencias propias, sustituyendo en (3):

$$\omega_1 = 13{,}2218 \;\Rightarrow\; \boxed{\{\mathbf{a}_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0{,}30073 \end{Bmatrix};} \qquad \omega_2 = 59{,}7928 \;\Rightarrow\; \boxed{\{\mathbf{a}_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -13{,}30073 \end{Bmatrix},}$$

donde hemos tomado como criterio de normalización el primer elemento de cada vector propio igual a la unidad.

La solución de régimen permanente pedida corresponde a una solución particular armónica del tipo $\{\mathbf{x}(t)\} = \{\mathbf{b}\}\operatorname{sen}\Omega t$, con $\Omega = v_0/\lambda$, en la ecuación (1) con amortiguamiento $[\mathbf{C}]$ despreciable. Sustituyendo resulta

$$\left(-\Omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]\right)\{\mathbf{b}\} = A\Omega^2\begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix}.$$

Considerando el valor $\Omega = 0{,}9\omega_1 = 11{,}8996$ rad/s, se obtiene finalmente

$$\boxed{\{\mathbf{b}\} = A\begin{Bmatrix} 4{,}4802 \\ 1{,}3762 \end{Bmatrix}.}$$