Mecánica

EXAMEN FINAL (11 de junio del 2005)

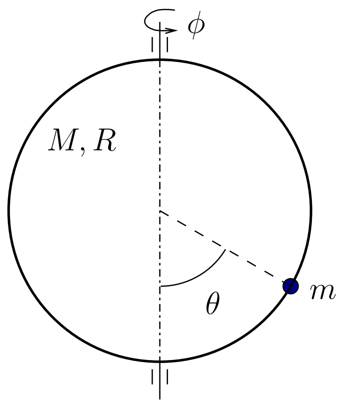
Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 5/45) Tiempo: 25 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Se considera un sistema definido por coordenadas libres $\{q_1, q_2, \dots q_n\}$. *Definir* el concepto de integrales primeras en la dinámica analítica. *Discutir* el significado físico de la denominada «integral de Jacobi».

Aplicación: el sistema de la figura adjunta está constituido por un aro de masa M y radio R que puede girar libremente alrededor de un diámetro vertical fijo y una masa m ensartada que desliza sin rozamiento en el mismo. Expresar las integrales primeras. (5 ptos.)



Admitiendo que el sistema es conservativo y holónomo, definiendo la *función Lagrangiana* $L = T - V$, la dinámica queda definida por las *ecuaciones de Lagrange*: $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\,(\mathrm{d}L/\mathrm{d}\dot{q}_j) - \mathrm{d}L/\mathrm{d}q_j = 0$.

Si la función Lagrangiana no depende explícitamente de una coordenada q_j (es decir, si $\partial L/\partial q_j = 0$) se deduce inmediatamente la conservación del *momento generalizado* correspondiente:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\dot{q}_j} = \text{cte}\,.} \tag{1}$$

Se dice entonces que q_j es una *coordenada cíclica* o *ignorable.* Las ecuaciones (1) constituyen integrales primeras del movimiento, ya que expresan conservación de magnitudes en las que sólo intervienen derivadas primeras de las coordenadas.

Derivando la función lagrangiana y haciendo uso de la regla de la cadena:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}\,,$$

donde se acepta la convención de suma implícita para los índices repetidos. Si se tiene en cuenta ahora las ecuaciones de Lagrange se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right)}_{\stackrel{\text{def}}{=} h} = -\frac{\partial L}{\partial t}\,.$$

De esta expresión se deduce que si la Lagrangiana L no depende explícitamente del tiempo (es decir, si $\partial L/\partial t = 0$), h es una constante del movimiento, denominada *integral de Jacobi*:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = \text{cte.}}$$

Esta es el otro tipo de integral primera que puede existir en la dinámica analítica.

Admitiendo como es usual que el potencial V no depende de las velocidades generalizadas $\dot{q}_i$, si la energía cinética es una función cuadrática homogénea de las mismas, h coincidirá con la energía total:

$$\text{si } T = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - (T - V) = \underbrace{(a_{ij} \dot{q}_j) \, \dot{q}_i}_{=2T} - (T - V) = T + V \ .$$

La condición anterior se cumplirá siempre que la definición de las coordenadas generalizadas no dependa del tiempo, es decir $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\boldsymbol{r}_k(q_i) = 0$. En este caso la conservación de h equivale al principio de conservación de la energía. En caso contrario será en general $h \neq T + V$, que además según los casos podrá o no conservarse.

Aplicación: La Lagrangiana vale en este caso

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} M R^2 \right) \dot{\phi}^2 + \frac{m}{2} (R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \operatorname{sen}^2 \theta \, \dot{\phi}^2) + mgR \cos \theta \, .$$

Esta expresión no depende de ϕ, que por tanto es una coordenada cíclica:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{p_\phi = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\phi} + m R^2 \operatorname{sen}^2 \theta \, \dot{\phi} = \text{cte} \, .}$$

Por otra parte, puesto que L no depende tampoco explícitamente del tiempo, se conserva la integral de Jacobi:

$$\begin{aligned} h &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - L \\ &= \left(\frac{1}{2} M R^2 \dot{\phi} + m R^2 \operatorname{sen}^2 \theta \, \dot{\phi} \right) \dot{\phi} + m R^2 \dot{\theta}^2 - L \, ; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = \underbrace{\frac{1}{4} M R^2 \dot{\phi}^2 + \frac{m}{2} R^2 \operatorname{sen}^2 \theta \, \dot{\phi}^2 + \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2}_{T} \underbrace{- mgR \cos \theta}_{V} = \text{cte} \, ,}$$

que como se comprueba representa en este caso la conservación de la energía, $h = T + V$. Los valores de las constantes se determinarían en ambos casos mediante las condiciones iniciales del movimiento.