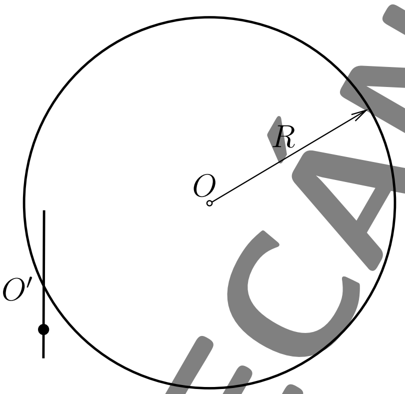
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (26 de noviembre de 2005)

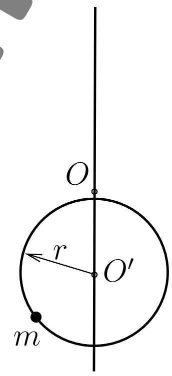
Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Una partícula pesada de masa m se mueve con ligadura bilateral lisa en un aro sin masa de radio r. Este aro se mueve a su vez de forma que se mantiene siempre vertical y su centro O' desliza sin rozamiento sobre una circunferencia vertical fija de radio R. El plano vertical del aro es siempre perpendicular al plano vertical fijo de la circunferencia.



a) Vista frontal



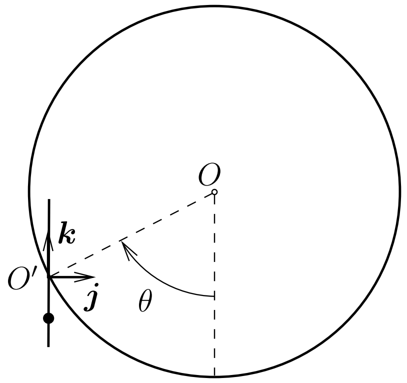
b) Vista lateral

Se pide:

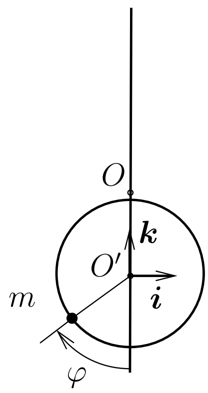
1. Determinar el número de grados de libertad del sistema y justificar la elección de parámetros que los representen. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento de la partícula;
2. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento de la partícula;
3. Obtener la reacción que ejerce el aro sobre la partícula en una posición genérica en función de los grados de libertad y sus derivadas.

⋆

1. El sistema tiene 2 grados de libertad, que podemos representar mediante el ángulo θ que sitúa el centro O' del aro en la circunferencia, y el ángulo φ que sitúa la partícula en el aro. Resulta también conveniente emplear un sistema móvil auxiliar ligado al aro $\{O'; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ que tiene un movimiento de traslación circular y que se muestra la figura adjunta.



a) Vista frontal



b) Vista lateral

Sólo existe una integral primera, que es la conservación de la energía total de la partícula, puesto que la única fuerza que trabaja es el peso, que es conservativa. Esto es debido a que la partícula está obligada a moverse en una curva lisa móvil sin masa y cuyo movimiento no está impuesto, por lo que su reacción no trabaja. Esta misma conclusión puede obtenerse advirtiendo que la restricción impuesta por el aro es totalmente equivalente a la que resultaría de obligar a la partícula a moverse en una superficie lisa fija generada por la traslación circular del aro, caso en el que es evidente que la reacción es perpendicular a dicha superficie y por tanto no trabaja.

2. La primera ecuación diferencial que puede plantearse es la integral primera de la energía, discutida en el apartado anterior. La velocidad de la partícula puede calcularse haciendo uso del sistema auxiliar móvil ligado al aro, mediante sus componentes relativa y de arrastre:

$$\boldsymbol{v} = \underbrace{(-r\dot{\varphi}\cos\varphi\boldsymbol{i} + r\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{k})}_{\boldsymbol{v}_{rel}} + \underbrace{(R\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{k} - R\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{j})}_{\boldsymbol{v}_{arr} = \boldsymbol{v}_{O'}}$$

Situando en el plano horizontal fijo que pasa por O el origen del potencial gravitatorio, se obtiene la primera ecuación del movimiento:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + V = cte. \\ &= \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + 2Rr\dot{\theta}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\right) - mg(R\cos\theta + r\cos\varphi) \end{aligned} \tag{1}$$

donde el valor de la constante E se podría obtener a partir de las condiciones iniciales del sistema.

Es posible obtener otra ecuación del movimiento planteando el principio de cantidad de movimiento a la partícula en dirección tangencial al aro, según la cual no existe ninguna fuerza de reacción. Haciendo uso de nuevo del sistema móvil ligado al aro (teniendo en cuenta que $\boldsymbol{a}_{coriolis} = \boldsymbol{0}$, puesto que solo se traslada) es posible obtener la aceleración de la partícula:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} = &\underbrace{(-r\ddot{\varphi}\cos\varphi + r\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi)\boldsymbol{i} + (r\ddot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi + r\dot{\varphi}^2\cos\varphi)\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{a}_{rel}} + \\ &+ \underbrace{(R\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta + R\dot{\theta}^2\cos\theta)\boldsymbol{k} + (-R\ddot{\theta}\cos\theta + R\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{j}}_{\boldsymbol{a}_{arr} = \boldsymbol{a}_{O'}} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la fuerza del peso $\boldsymbol{P} = -mg\boldsymbol{k}$, y denotando por $\boldsymbol{\tau} = -\cos\varphi\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{k}$ el versor que define la dirección tangencial, se obtiene finalmente la segunda ecuación del movimiento:

$$(\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{\tau} \quad\Longrightarrow\quad -mg\operatorname{sen}\varphi = m\left[r\ddot{\varphi} + R\left(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)\operatorname{sen}\varphi\right] \tag{2}$$

3. La reacción tiene dos componentes, N_1 en dirección radial en el plano del aro (según el versor $\boldsymbol{\nu} = -\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{k}$), y N_2 en dirección perpendicular a éste (versor $\boldsymbol{j}$). Planteando el principio de cantidad de movimiento a la partícula en estas dos direcciones se obtiene:

$$(\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{\nu} \quad\Longrightarrow\quad N_1 = mg\cos\varphi + m\left[r\dot{\varphi}^2 + R\left(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)\cos\varphi\right] \tag{3}$$

$$(\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{j} \quad\Longrightarrow\quad N_2 = mR\left(-\ddot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta\right) \tag{4}$$