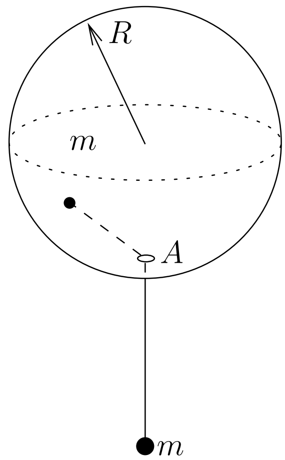
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (24 de enero del 2006)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

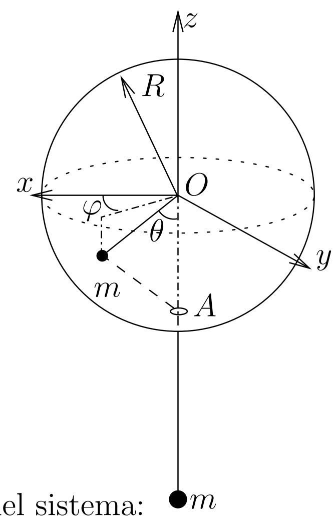
El sistema de la figura está formado por una esfera fija y lisa de radio R, que tiene un agujero en su punto más bajo A, y por dos masas puntuales pesadas de masa m unidas por un hilo inextensible de longitud $2R$ que pasa por A. Una de las masas se mueve con enlace bilateral sobre la esfera y la otra se mueve colgando del hilo (ver figura). En el instante inicial la partícula que está sobre la esfera se encuentra en el ecuador de la misma con velocidad horizontal v_0, y la otra se encuentra en reposo en la vertical que pasa por A. Se pide:



1. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Reacción de la esfera sobre la masa m y tensión del hilo.
3. Valor de v_0 para que la distancia máxima de la masa inferior al punto A valga R.

★

1. Para resolver el problema utilizamos coordenadas esféricas con origen en O, siendo θ y φ los grados de libertad del problema (ver figura). Como la masa que está colgando está inicialmente en reposo y las fuerzas aplicadas sobre ella son verticales su movimiento es vertical, siendo su coordenada z en un instante genérico:



$$z = -(3R - 2R \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}) \tag{1}$$

La velocidad de esta masa se obtiene derivando respecto del tiempo en (1)

$$\dot{z} = R\dot{\theta}\cos\frac{\theta}{2} \tag{2}$$

Dado que las fuerzas activas derivan de un potencial y los enlaces son lisos, se conserva la energía mecánica del sistema:

$$\frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\theta) + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2\cos^2\frac{\theta}{2} - mgR\cos\theta + 2mgR\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = E \tag{3}$$

Como todas las fuerzas son verticales o cortan al eje Oz, se conserva la proyección sobre el eje Oz del momento cinético en O del sistema:

$$\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{k} = \text{ constante} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}\operatorname{sen}^2\theta = h \tag{4}$$

Las ecuaciones diferenciales del movimiento son (3) y (4), obteniéndose las constantes E y h a partir de las condiciones iniciales $\theta_0 = \pi/2$, $\dot{\theta}_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = v_0/R$:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \sqrt{2}mgR, \quad h = \frac{v_0}{R} \tag{5}$$

2. La reacción N de la esfera sobre la partícula y la tensión T del hilo las obtenemos a partir de la 2.ª ley de Newton aplicada a la partícula sobre la esfera (en dirección radial) y a la partícula que cuelga del hilo (en dirección vertical):

$$N + T \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} - mg\cos\theta = mR(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\theta) \tag{6}$$

$$T - mg = m\ddot{z} \tag{7}$$

Derivando respecto del tiempo en (2) y sustituyendo en (7) se obtiene la tensión T, y sustituyendo a su vez T en (6) se obtiene N:

$$T = mg + mR(\ddot{\theta}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}) \tag{8}$$

$$N = mg\cos\theta + mR(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\operatorname{sen}^2\theta) - mg\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} - mR\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}(\ddot{\theta}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}) \tag{9}$$

3. En el instante en que la distancia máxima de la partícula que cuelga de hilo al punto A vale R se verifica:

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \quad \dot{\theta} = 0 \tag{10}$$

Sustituyendo en la integral primera (4) el valor obtenido en (5 para la constante h y $\theta = \pi/3$, se obtiene el valor de $\dot{\varphi}$ en dicho instante:

$$\dot{\varphi} = \frac{4v_0}{3R} \tag{11}$$

El valor pedido de v_0 se obtiene sustituyendo los valores de las expresiones (10) y (11) en la ecuación de la energía, y despejando:

$$v_0^2 = 3(2\sqrt{2} - 1)gR \tag{12}$$