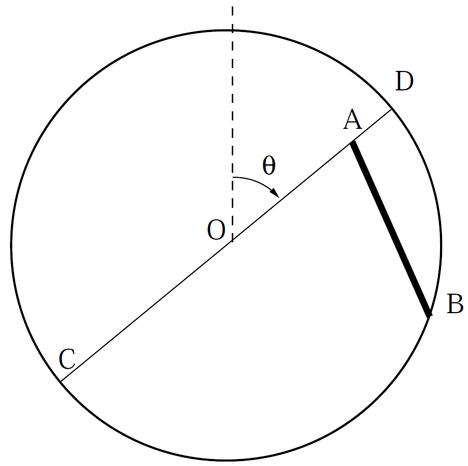
# Mecánica

EXAMEN PARCIAL Y FINAL (24 de enero del 2006)

*Apellidos* *Nombre* *N.º* *Grupo*

*Ejercicio 3.º* (puntuación: 10/30 ó 10/45) Tiempo: 60 min.

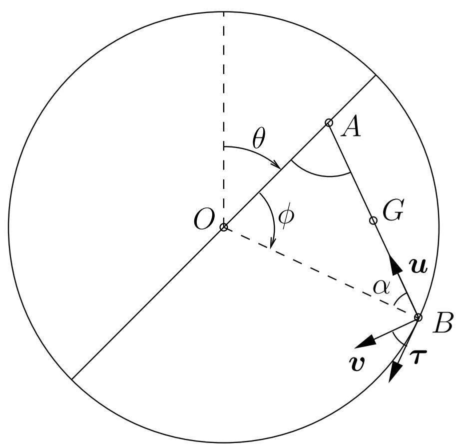
Un aro de radio $R$ reforzado con un diámetro dado $CD$ y momento de inercia conjunto respecto de $O$ de valor $I$, se mueve en un plano vertical con su centro $O$ fijo. Sobre el aro se mueve una varilla $AB$ de masa $m$ y longitud $R$ de tal modo que el extremo $A$ desliza sin rozamiento sobre el diámetro y el otro extremo $B$ desliza sin rozamiento por el aro. Se pide:




1. Lagrangiana del sistema.
2. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
3. Integrales primeras.
4. Calcular el par que hay que aplicar al aro para que su velocidad angular sea constante.

---

**1.—** El sistema tiene dos grados de libertad, para los que tomaremos el ángulo $\theta$ indicado en el enunciado y $\phi = \angle AOB = \angle OAB$. Para describir el movimiento emplearemos los vectores unitarios indicados en la figura adjunta $\boldsymbol{u}$ (según $BA$), $\boldsymbol{v}$ (normal), $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{\tau}$ (tangente a la circunferencia).




La velocidad angular de la varilla es $\boldsymbol{\Omega} = -(\dot\theta - \dot\phi)\boldsymbol{k}$. Teniendo en cuenta que la velocidad de $B$ es $\boldsymbol{v}_B = R(\dot\theta + \dot\phi)\boldsymbol{\tau}$, la velocidad del centro de la varilla $G$ vale

$$\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \wedge \frac{R}{2}\boldsymbol{u} = R(\dot\theta + \dot\phi)\boldsymbol{\tau} - \frac{R}{2}(\dot\theta - \dot\phi)\boldsymbol{v}\,. \qquad (1)$$

Necesitaremos el cuadrado de esta magnitud para la Lagrangiana,

$$\begin{aligned} v_G^2 &= R^2(\dot\theta + \dot\phi)^2 + \frac{R^2}{4}(\dot\theta - \dot\phi)^2 - R^2(\dot\theta + \dot\phi)(\dot\theta - \dot\phi)\cos\alpha \\ &= \frac{R^2}{4}\left[\dot\theta^2(1 + 8\cos^2\phi) + \dot\phi^2(1 + 8\operatorname{sen}^2\phi) + 6\dot\theta\dot\phi\right]. \end{aligned} \qquad (2)$$

Con esto ya podemos expresar la Lagrangiana,

$$\begin{aligned} L = T - V = \frac{1}{2}I\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m\frac{R^2}{4}\left[\dot\theta^2(1 + 8\cos^2\phi) + \dot\phi^2(1 + 8\operatorname{sen}^2\phi) + 6\dot\theta\dot\phi\right] + \frac{1}{2}\frac{1}{12}mR^2(\dot\theta - \dot\phi)^2 \\ - mg\left[2R\cos\phi\cos\theta - \frac{R}{2}\cos(\theta - \phi)\right] \end{aligned} \qquad (3)$$

**2.—** Las ecuaciones de Lagrange se obtienen derivando (3):

$$I\ddot{\theta}+\frac{1}{4}mR^2\ddot{\theta}(1+8\cos^2\phi)-4mR^2\dot{\theta}\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi+\frac{3}{4}mR^2\ddot{\phi}+\frac{1}{12}mR^2(\ddot{\theta}-\ddot{\phi})$$
$$-mg2R\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta+mg\frac{R}{2}\,\mathrm{sen}(\theta-\phi)=0\,; \quad (4)$$

$$\frac{1}{4}mR^2\ddot{\phi}(1+8\,\mathrm{sen}^2\phi)+2mR^2(\dot{\phi}^2+\dot{\theta}^2)\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi+\frac{3}{4}mR^2\ddot{\theta}-\frac{1}{12}mR^2(\ddot{\theta}-\ddot{\phi})$$
$$-mg2R\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta-mg\frac{R}{2}\,\mathrm{sen}(\theta-\phi)=0\,. \quad (5)$$

**3.—** Ninguna de las dos coordenadas consideradas $(\theta,\phi)$ son cíclicas ya que ambas aparecen explícitamente en la espresión de la Lagrangiana (3). Sin embargo, la energía sí se conserva, ya que las fuerzas son conservativas y los enlaces lisos:

$$E=T+V=\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m\frac{R^2}{4}\left[\dot{\theta}^2(1+8\cos^2\phi)+\dot{\phi}^2(1+8\,\mathrm{sen}^2\phi)+6\dot{\theta}\dot{\phi}\right]+\frac{1}{2}\frac{1}{12}mR^2(\dot{\theta}-\dot{\phi})^2$$
$$+mg\left[2R\cos\phi\cos\theta-\frac{R}{2}\cos(\theta-\phi)\right]\,. \quad (6)$$

(Esta expresión coincidirá con la integral de Jacobi al ser $T$ homogénea de grado 2 en las velocidades generalizadas.)

**4.—** El momento $M$ aplicado al aro es la fuerza generalizada asociada al giro del aro $\theta$, lo que se deduce inmediatamente de la expresión de su trabajo virtual $\delta W=M\delta\theta$. Por tanto, emplearemos la expresión de la ecuación de lagrange en $\theta$ (4), introduciendo a la derecha del signo igual el momento $M$ y sustituyendo $\dot{\theta}=\omega,\ddot{\theta}=0$:

$$-4mR^2\omega\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi+\frac{3}{4}mR^2\ddot{\phi}-\frac{1}{12}mR^2\ddot{\phi}-mg2R\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta+mg\frac{R}{2}\,\mathrm{sen}(\theta-\phi)=M\,. \quad (7)$$