Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (24 de enero del 2006)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 5/45) Tiempo: 25 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja*. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Sea un sistema dinámico definido mediante coordenadas libres $\{q_j,\ j=1,\dots n\}$ con Lagrangiana $L(q_j,\dot q_j,t)$. *Deducir* en qué casos la integral de Jacobi $h=\sum_{j=1}^n(\partial L/\partial\dot q_j)\dot q_j - L$ se conserva y si coincide con la energía mecánica total del sistema. *Aplicación:* estudiar un péndulo simple (masa puntual m y longitud ℓ), a cuyo punto de anclaje se impone una velocidad horizontal constante v_0. (5 ptos.)

Derivando la función lagrangiana y haciendo uso de la regla de la cadena:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\ddot q_i+\frac{\partial L}{\partial t}\,,$$

donde se acepta la convención de suma implícita para los índices repetidos. Si se tiene en cuenta ahora las ecuaciones de Lagrange $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\,(\mathrm{d}L/\mathrm{d}\dot q_j)-\mathrm{d}L/\mathrm{d}q_j=0$ se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\dot q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\ddot q_i+\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i\right)+\frac{\partial L}{\partial t}\quad\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i-L\right)=-\frac{\partial L}{\partial t}\,.$$

Se deduce por tanto que si L no depende explícitamente del tiempo, la *integral de Jacobi* es una constante del movimiento:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial t}=0\quad\Rightarrow\quad h=\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i-L=\text{cte.}}$$

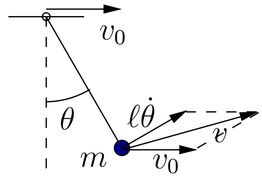
Admitiendo que el potencial V no depende de las velocidades generalizadas $\dot q_i$, si la energía cinética es una función cuadrática homogénea de las mismas, h coincidirá con la energía total:

$$\text{si } T=\frac{1}{2}a_{ij}\dot q_i\dot q_j\quad\Rightarrow\quad h=\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\dot q_i-(T-V)=\underbrace{(a_{ij}\dot q_j)\,\dot q_i}_{=2T}-(T-V)=T+V\,.$$

La condición anterior se cumplirá siempre que la definición de las coordenadas generalizadas no dependa del tiempo, es decir $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\boldsymbol{r}_k(q_i)=0$. En este caso la conservación de h equivale al principio de conservación de la energía. En caso contrario será en general $h\neq T+V$, que además según los casos podrá o no conservarse.

Aplicación: La Lagrangiana vale en este caso

$$L=\frac{1}{2}m\left(\ell^2\dot\theta^2+v_0^2+2v_0\ell\dot\theta\cos\theta\right)+mg\ell\cos\theta\,.$$



Puesto que L no depende explícitamente de t, se conserva la integral de Jacobi:

$$h=\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\dot\theta-L=\frac{1}{2}m\ell^2\dot\theta^2-\frac{1}{2}mv_0^2-mg\ell\cos\theta\quad(\text{cte.})\,.$$

Puesto que se emplea un sistema de coordenadas móvil (la base del péndulo), T no es homogénea cuadrática en $\dot\theta$ y la integral de Jacobi no coincide con la energía ($h\neq T+V$), que no se conserva:

$$T+V=\frac{1}{2}m\left(\ell^2\dot\theta^2+v_0^2+2v_0\ell\dot\theta\cos\theta\right)-mg\ell\cos\theta\,.$$