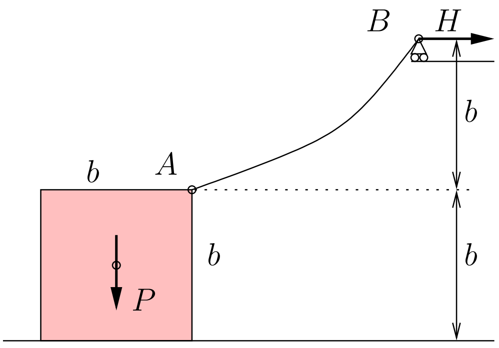
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (24 de enero del 2006)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 5.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

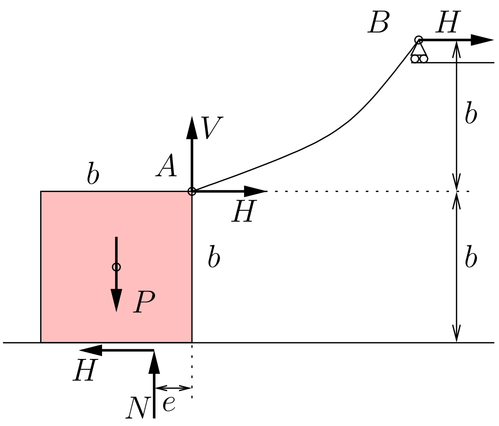
Se considera un bloque de sección cuadrangular, de lado b y peso P, apoyado sobre un plano horizontal con coeficiente de rozamiento μ. En su esquina A está anclado un cable homogéneo AB, perfectamente flexible e inextensible, de longitud $2b$ y peso total $P/5$. El extremo B del cable se halla anclado a un apoyo a altura constante $2b$ sobre el plano, sometido a una determinada acción horizontal H. El coeficiente de rozamiento vale $\mu = 1/2$. Se pide:



1. Obtener la configuración del cable, suponiendo que la acción horizontal H es la máxima posible antes de que el bloque comience a deslizar, calculando la distancia horizontal entre A y B, así como la fuerza vertical que transmite al bloque en A.

2. Comprobar que en la situación anterior el bloque no vuelca, obteniendo la resultante de la reacción del plano sobre el bloque y el punto de aplicación de la misma.

1.— El cable formará un arco de catenaria entre A y B, cuya expresión es $y = a\cosh(x/a)$. El bloque quedará sometido a las fuerzas dibujadas en la figura adjunta. Podemos establecer las siguientes relaciones:



$$q = \frac{P/5}{2b} = \frac{P}{10b}; \quad H = qa$$
$$V = qa\,\mathrm{senh}\,\frac{x_A}{a}; \quad N = P - V\,.$$

Se pueden expresar tres ecuaciones, la primera indica la diferencia de cotas en la catenaria, la segunda la longitud del cable, y la tercera el estado límite de deslizamiento caracterizado por $H = \mu N$:

$$b = a\cosh\frac{x_B}{a} - a\cosh\frac{x_A}{a}\,, \tag{1}$$
$$2b = a\,\mathrm{senh}\,\frac{x_B}{a} - a\,\mathrm{senh}\,\frac{x_A}{a}\,, \tag{2}$$
$$qa = \mu\left(P - qa\,\mathrm{senh}\,\frac{x_A}{a}\right)\,. \tag{3}$$

Estas tres ecuaciones permiten resolver para las tres incógnitas (a, x_A, x_B). Para ello en primer lugar empleamos (3) para eliminar $a\,\mathrm{senh}(x_A/a)$ de (1) y (2), teniendo en cuenta que $\cosh(\cdot)^2 = 1 + \mathrm{senh}^2(\cdot)$:

$$b = a\cosh\frac{x_B}{a} - \sqrt{a^2 + (10b - 2a)^2}\,, \tag{4}$$
$$2b = a\,\mathrm{senh}\,\frac{x_B}{a} - (10b - 2a)\,. \tag{5}$$

A su vez, combinamos los términos hiperbólicos de estas dos ecuaciones elevados al cuadrado, resultando

$$\left[b + \sqrt{a^2 + (10b - 2a)^2}\right]^2 = a^2 + [2b + (10b - 2a)]^2 \ , \tag{6}$$

y operando se obtiene finalmente una ecuación cuadrática de fácil solución:

$$44a^2 - 528ab + 1449b^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 7{,}7516b \\ a = 4{,}2484b \end{cases} \tag{7}$$

Sustituyendo en (3) y (5) estas dos soluciones arrojan respectivamente ($x_A = -5{,}122b, x_B = -3{,}3937b$) y ($x_A = 1{,}4735b, x_B = 3{,}1938b$). La primera no es válida, se trata de una solución espúrea que se ha introducido al elevar el cuadrado las ecuaciones para despejar las funciones hiperbólicas. Tomando pues la segunda, los valores que se piden se obtienen inmediatamente como

$$x_B - x_A = 1{,}7203b; \quad V = qa \operatorname{senh} \frac{x_A}{a} = 0{,}1503P \, . \tag{8}$$

2.— El valor de la reacción normal es $N = P - V = 0{,}8497P$. El equilibrio de momentos en el bloque arroja

$$-P\frac{b}{2} + Ne + Hb = 0 \quad \Rightarrow \quad e = b\frac{P/2 - H}{N} = 0{,}08846b \, . \tag{9}$$

Se comprueba por tanto que al ser $e > 0$ la reacción N queda dentro del bloque y éste no vuelca.