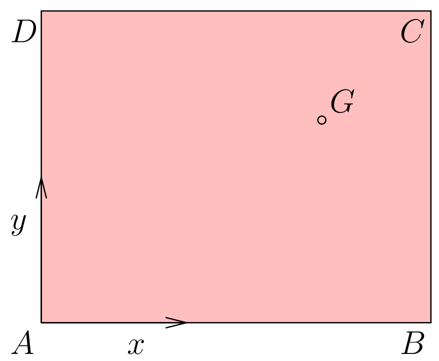
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (1 de abril del 2006)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Una placa rectangular $ABCD$, de dimensiones $a\times b$, tiene una masa M que *no está* repartida homogéneamente en su superficie. Descansa en reposo sobre un plano horizontal liso. Una partícula de masa m incide con velocidad horizontal v sobre el lado AB, perpendicularmente a éste, en un punto inmediato al extremo A. Se observa que la placa inicia un movimiento de giro alrededor de un punto cuyas coordenadas, respecto de los ejes Axy, son (x_1, y_1). Por otra parte, cuando el punto de impacto es el inmediato al otro extremo B, se observa que el giro se produce alrededor de un punto de abscisa x_2. Se pide:



1. Situar el centro de masas G de la placa mediante sus coordenadas (x_G, y_G) en función de los datos anteriores.
2. Encontrar el momento de inercia I_G de la placa respecto del eje que pasa por G y es perpendicular a su plano.
3. ¿En qué punto del lado AB debe incidir m (con la misma dirección indicada) para quedar sin velocidad, suponiendo el choque perfectamente elástico?

———————— ⋆ ————————

1.— Como consecuencia del choque suponemos que sobre la placa actúa una impulsión P. En el caso del impacto en A las ecuaciones de balance son

$$P_x = 0 = M\omega(y_1 - y_G); \quad P_y = P = Mv_G = -M\omega(x_1 - x_G); \quad -Px = I_G\omega\,, \tag{1}$$

donde hemos considerado el centro de rotación situado en el punto (x_1, y_1). De la ecuación $(1)_1$ se deduce $\boxed{y_G = y_1.}$ De las ecuaciones $(1)_2$ y $(1)_3$ se obtiene

$$M(x_1 - x_G)x_G = I_G\,. \tag{2}$$

Aplicando ahora las ecuaciones de balance al impacto en B, se obtiene de forma análoga

$$-M(x_2 - x_G)(a - x_G) = I_G\,. \tag{3}$$

De las ecuaciones (2) y (3) se despeja:

$$\boxed{x_G = \frac{x_2 a}{x_2 - x_1 + a}\,.} \tag{4}$$

Obsérvese que este resultado se obtiene independientemente del valor concreto de la percusión P, así como de la velocidad angular que se alcance en cada caso, cuyas magnitudes son irrelevantes.

2.— Basta sustituir (4) en (2) para obtener

$$\boxed{I_G = Mx_2a\frac{(x_1 - a)(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1 + a)^2}\,.} \tag{5}$$

3.— Si m queda sin velocidad, la impulsión deve valer $P = mv$. Por otra parte, al ser el choque elástico la velocidad de la placa en el punto de choque después de la impulsión debe ser v. Con esto aplicamos las ecuaciones de balance y la ecuación cinemática de la placa, suponiendo que el choque se produce en un punto de abscisa x:

$$\begin{aligned} mv &= Mv_G\,; \\ -mv(x_G - x) &= I_G\omega\,; \\ v_G - \omega(x_G - x) &= v\,. \end{aligned} \tag{6}$$

De estas tres ecuaciones podemos despejar

$$\boxed{(x - x_G)^2 = I_G\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{M}\right)\,.} \tag{7}$$

Para que pueda haber alguna solución de entrada debe ser $M > m$. Dado esto, en principio podrían existir dos soluciones correspondientes a las dos raíces de la ecuación anterior, situadas a ambos lados de G. Para que estas puedan existir se deben verificar las ecuaciones de compatibilidad siguientes:

$$\begin{cases} \text{para la solución } x > x_G: \quad & x_G + \sqrt{I_G}\sqrt{\frac{1}{m} - \frac{1}{M}} < a\,; \\ \text{para la solución } x < x_G: \quad & x_G - \sqrt{I_G}\sqrt{\frac{1}{m} - \frac{1}{M}} > 0\,. \end{cases}$$