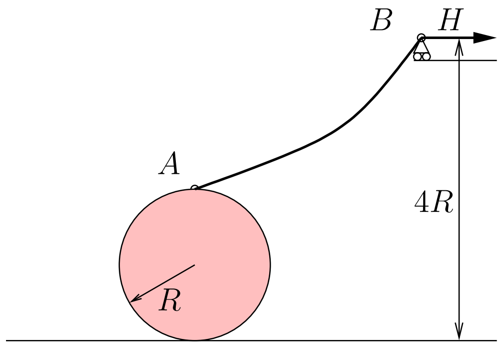
Mecánica

EXAMEN PARCIAL Y FINAL (10 de junio del 2006)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30 ó 10/45) Tiempo: 60 min.

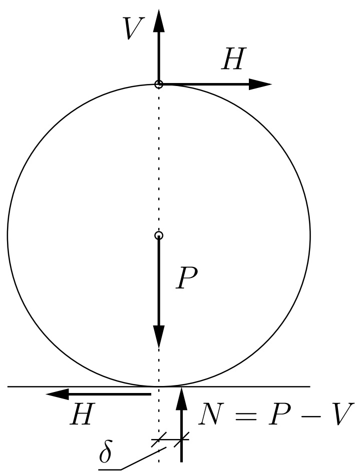
Se considera un disco de radio R y peso P, apoyado sobre una recta horizontal sobre la cual rueda sin deslizar. En su punto superior A está anclado un cable homogéneo AB, perfectamente flexible e inextensible, de longitud $4R$ y peso total $P/25$. El extremo B del cable se halla anclado a un apoyo a altura constante $4R$ sobre la recta, sometido a una determinada acción horizontal H. En el contacto entre disco y recta hay una resistencia a la rodadura definida por el coeficiente $\delta = R/10$. Se pide:



1. Suponiendo que entre el disco y la recta hay un rozamiento de Coulomb, valor necesario del coeficiente de rozamiento para que al aumentar la fuerza H el disco ruede pero no deslice.

2. Obtener la configuración del cable, suponiendo que la acción horizontal H es la máxima posible antes de que el disco comience a rodar. Calcular asimismo la distancia horizontal entre los extremos del cable A y B.

1.— La resistencia a la rodadura origina que la reacción normal N se adelante una distancia que como máximo vale δ cuando el disco tiende a rodar. La figura adjunta representa el diagrama de fuerzas en el límite de rodadura. El equilibrio exige que se cumplan las desigualdades tanto de rozamiento como de rodadura:



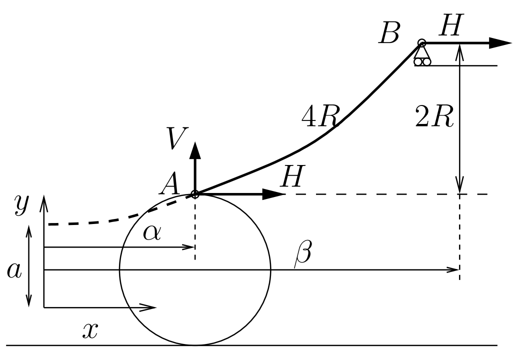
$$\text{equilibrio} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} H \leq \mu N & \text{(rozamiento)} \\ 2RH \leq \delta N & \text{(rodadura)} \end{cases}$$

Si el disco comienza a rodar antes que a deslizar, deberá cumplirse

$$\boxed{\mu > \frac{\delta}{2R} = \frac{1}{20}\,.}$$

2.— Si el disco está en el límite de rodadura se cumplirá

$$2RH = (P - V)\delta\,.$$



El cable forma un arco de catenaria entre A y B de parámetro a (desconocido a priori), cuyo vértice está situado a una distancia α en horizontal de A. La tensión horizontal del cable es $H = qa$, y la tensión vertical en A vale $V = qa\,\mathrm{senh}(\alpha/a)$. Por otra parte, considerando el dato del peso del cable, $P = 100qR$. Por tanto la ecuación anterior puede expresarse como

$$\mathrm{senh}\,\frac{\alpha}{a} = 100\frac{R}{a} - 20\,. \qquad (1)$$

Obtenemos otras dos ecuaciones al expresar la diferencia de cotas y la longitud del cable entre A y B:

$$2R = a\cosh\frac{\beta}{a} - a\cosh\frac{\alpha}{a}\,, \tag{2}$$

$$4R = a\,\mathrm{senh}\,\frac{\beta}{a} - a\,\mathrm{senh}\,\frac{\alpha}{a}\,. \tag{3}$$

El problema queda planteado con las 3 ecuaciones (1), (2) y (3) para las 3 incógnitas (a, α, β). Para resolverlas en primer lugar se eliminan los términos en β en (2) y (3), despejando éstos, elevando al cuadrado y teniendo en cuenta que $\cosh^2(\cdot) = 1 + \mathrm{senh}^2(\cdot)$, llegándose a:

$$3\,\mathrm{senh}^2\frac{\alpha}{a} + 12\frac{R}{a}\,\mathrm{senh}\,\frac{\alpha}{a} + 9\frac{R^2}{a^2} - 1 = 0\,. \tag{4}$$

Eliminamos ahora el término $\mathrm{senh}(\alpha/a)$ mediante (1), llegándose a una ecuación cuadrática en función de R/a, cuya solución es inmediata:

$$31209\left(\frac{R}{a}\right)^2 - 12240\frac{R}{a} + 1199 = 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} R/a = 0{,}202075\,, \\ R/a = 0{,}190119\,. \end{cases} \tag{5}$$

El resto de parámetros necesarios se obtienen al sustituir estas soluciones en (1), (2) y (3). La segunda de las soluciones obtenidas no es válida, como puede comprobarse ya que no satisface las ecuaciones citadas. Se trata de una solución espúrea, introducida artificialmente al elevar al cuadrado las expresiones. Por tanto, la solución resulta

$$a = 4{,}948647R\,;\quad \alpha = 1{,}019817R\,;\quad \beta = 4{,}416828R\,;\quad \beta - \alpha = 3{,}397011R\,. \tag{6}$$