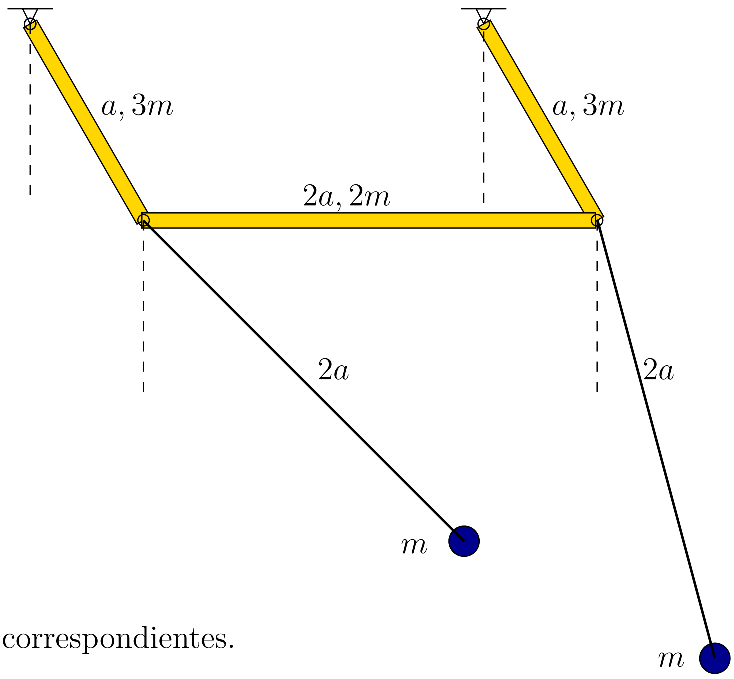
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (10 de junio del 2006)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/30) — Tiempo: 60 min.

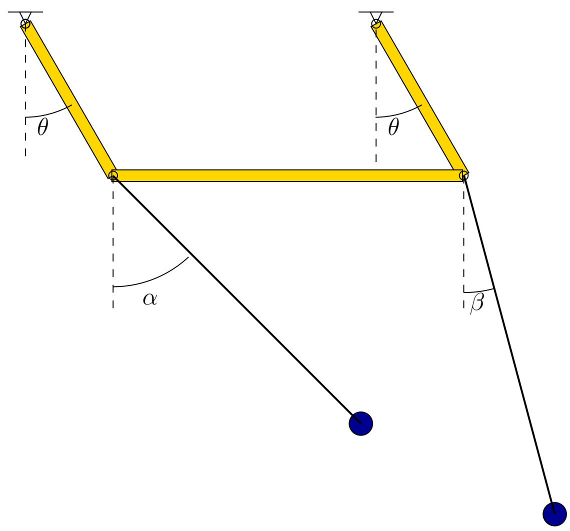
Se considera el sistema de la figura, formado por dos varillas iguales de longitud a y masa $3m$ articuladas en sendos puntos fijos, a la misma altura y distantes $2a$, junto con una tercera varilla de masa $2m$ y longitud $2a$ articulada en los extremos libres. A su vez de estos extremos cuelgan sendos péndulos simples de longitud $2a$ y masa puntual m. El movimiento del conjunto se desarrolla en un plano vertical. Se pide:



1. Obtener las expresiones de la energía cinética y potencial en función de los grados de libertad y sus derivadas.
2. Para el caso de pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable, calcular a partir de las expresiones anteriores las matrices de masa y rigidez correspondientes.
3. Calcular las frecuencias propias y los modos normales de vibración asociados. Expresar la matriz modal que relaciona las coordenadas normales con las geométricas.

⋆

1.— El sistema tiene tres grados de libertad, para los que emplearemos las coordenadas libres $\{\theta, \alpha, \beta\}$ definidas en la figura adjunta. La expresión de la energía cinética se desarrolla como



$$T = 2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}3ma^2\right)\dot\theta^2 + \frac{1}{2}2m(a\dot\theta)^2 + \frac{1}{2}m\left[4a^2\dot\alpha^2 + a^2\dot\theta^2 + 4a^2\dot\theta\dot\alpha\cos(\alpha-\theta)\right] + \frac{1}{2}m\left[4a^2\dot\beta^2 + a^2\dot\theta^2 + 4a^2\dot\theta\dot\beta\cos(\beta-\theta)\right] ,$$

resultando

$$T = ma^2\left[3\dot\theta^2 + 2\dot\alpha^2 + 2\dot\beta^2 + 2\dot\theta\dot\alpha\cos(\alpha-\theta) + 2\dot\theta\dot\beta\cos(\beta-\theta)\right] . \quad (1)$$

La expresión del potencial resulta

$$V = -mga\left(7\cos\theta + 2\cos\alpha + 2\cos\beta\right) . \quad (2)$$

2.— Es obvio que la posición de equilibrio estable es la inferior, $(\theta, \alpha, \beta) = (0, 0, 0)$. Las matrices pedidas pueden obtenerse derivando las expresiones de T y V en dicha posición:

$$[\mathbf{M}] = \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right]_{\mathbf{q}=0} = ma^2 \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$[\mathbf{K}] = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right]_{\mathbf{q}=0} = mga \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

3.— Para obtener las frecuencias propias desarrollamos la ecuación característica:

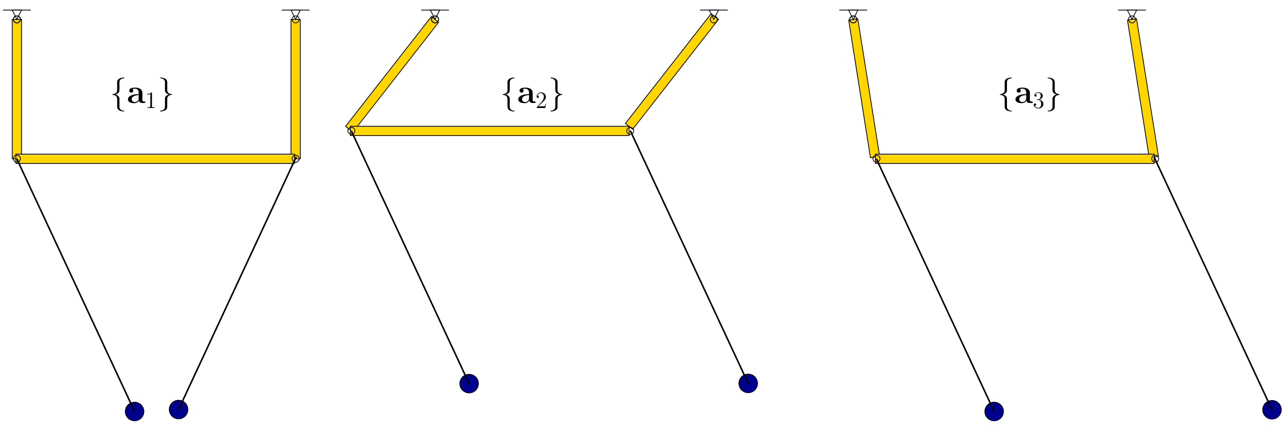
$$0 = \det([\mathbf{K} - \omega^2[\mathbf{M}]) = (ma^2)^3 \left(2\frac{g}{a} - 4\omega^2\right) \left[\left(7\frac{g}{a} - 6\omega^2\right)\left(2\frac{g}{a} - 4\omega^2\right) - 2(2\omega^2)^2\right], \tag{5}$$

cuyas soluciones resultan

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{a}}; \quad \omega_{2,3} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{5 \pm \sqrt{11}}\,. \tag{6}$$

Sustituyendo cada una de estas frecuencias en la matriz característica se obtienen los vectores propios asociados o modos normales de vibración:

$$\{\mathbf{a}_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}; \quad \{\mathbf{a}_2\} = \begin{Bmatrix} -\frac{2}{7}(\sqrt{11}+2) \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad \{\mathbf{a}_3\} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{7}(\sqrt{11}-2) \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \tag{7}$$



La relación entre las coordenadas geométricas y las coordenadas normales queda definida por la matriz modal, cuyas filas son los modos normales de vibración:

$$\{\mathbf{q}(t)\} = u_1(t)\{\mathbf{a}_1\} + u_2(t)\{\mathbf{a}_2\} + u_3(t)\{\mathbf{a}_3\}$$

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{2}{7}(2+\sqrt{11}) & 1 & 1 \\ -\frac{2}{7}(2-\sqrt{11}) & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \{\mathbf{q}\} = [\mathbf{A}]^{\mathrm{T}}\{\mathbf{u}\}\,. \tag{8}$$