Mecánica

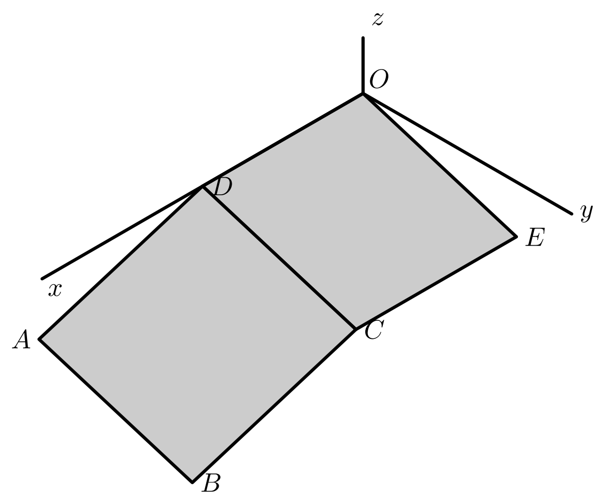
EXAMEN FINAL (10 de junio del 2006)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Un sistema está formado por dos placas cuadradas $ODCE$ y $DABC$, de lado a y masa m cada una. Las placas pueden moverse de modo que el lado OD está fijo en el eje x coincidiendo O con el origen y ambas placas están articuladas entre sí en el lado DC. Se pide:

1. Grados de libertad y coordenadas generalizadas del sistema.
2. Tensor de inercia del cuadrado $DABC$ respecto del vértice D.
3. Ecuaciones diferenciales de segundo orden del movimiento.
4. Integrales primeras del movimiento.



⋆

1.— La posición del cuadrado $ODCE$ se puede caracterizar por una rotación θ alrededor del eje Ox^-. La del cuadrado $DABC$ queda definida por esta misma rotación seguida de otra cuyo valor llamaremos ϕ alrededor del eje (rotado) DC (cuya dirección definiremos por el vector unitario $\boldsymbol{v} = \cos\theta\,\boldsymbol{j} - \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{k}$). Por tanto, la configuración del sistema se caracteriza por las coordenadas generalizadas libres (θ, ϕ).

2.— El tensor de inercia respecto de los ejes principales de la placa en su centro es

$$\boldsymbol{I}_G = \frac{ma^2}{12}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Para obtenerlo en el punto D aplicamos la expresión del campo tensorial de inercia (th. de Steiner generalizado),

$$\boldsymbol{I}_D = \boldsymbol{I}_G + m\left(r_{DG}^2\mathbf{1} - \boldsymbol{r}_{DG}\otimes\boldsymbol{r}_{DG}\right);$$

teniendo en cuenta $\boldsymbol{r}_{DG} = (a/2)(1,1,0)^{\mathrm{T}}$ resulta finalmente

$$\boldsymbol{I}_D = \frac{ma^2}{12}\begin{pmatrix}4 & -3 & 0\\ -3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}. \tag{2}$$

3.— Emplearemos el método de Lagrange para obtener las ecuaciones pedidas. Observamos que tanto el punto O de la placa 1 como el punto D de la placa 2 son fijos, por lo que la expresión de la energía cinética será

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_1\cdot\boldsymbol{I}_{1,O}\cdot\boldsymbol{\Omega}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_2\cdot\boldsymbol{I}_{2,D}\cdot\boldsymbol{\Omega}_2\,.$$

Las velocidades angulares son

$$\boldsymbol{\Omega}_1 = -\dot{\theta}\,\boldsymbol{i}\,; \quad \boldsymbol{\Omega}_2 = -\dot{\theta}\,\boldsymbol{i} + \dot{\phi}\,\boldsymbol{v} = -\dot{\theta}\cos\phi\,\boldsymbol{u} + \dot{\phi}\,\boldsymbol{v} - \dot{\theta}\operatorname{sen}\phi\,\boldsymbol{w}\,,$$

donde se emplea el triedro $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ ligado a la placa $DABC$, siendo $\boldsymbol{u}$ el vector unitario según DA, $\boldsymbol{v}$ según DC y $\boldsymbol{w}$ normal a la placa formando triedro a derechas. Sustituyendo se obtiene

$$T = \frac{ma^2}{2}\left[\frac{1}{3}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{3}\dot{\theta}^2(2+\operatorname{sen}^2\phi) + \frac{1}{2}\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\phi\right]\,. \tag{3}$$

Por otra parte, para obtener el potencial observamos que

$$z_{G1} = \frac{a}{2}\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k} = -\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta\,; \quad z_{G2} = z_{G1} + \frac{a}{2}\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{k} = -\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta - \frac{a}{2}\operatorname{sen}\phi\cos\theta\,,$$

por lo que

$$V = -mga\left(\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\phi\cos\theta\right)\,. \tag{4}$$

Mediante (3) y (4) se obtiene la Lagrangiana,

$$L = T - V = \frac{ma^2}{2}\left[\frac{1}{3}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{3}\dot{\theta}^2(2+\operatorname{sen}^2\phi) + \frac{1}{2}\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\phi\right] + mga\left(\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\phi\cos\theta\right)\,. \tag{5}$$

Derivando se obtienen las ecuaciones de Lagrange de la dinámica,

$$\begin{aligned}\frac{ma^2}{3}\ddot{\theta}(2+\operatorname{sen}^2\phi) + \frac{ma^2}{4}\ddot{\phi}\cos\phi - \frac{ma^2}{4}\dot{\phi}^2\operatorname{sen}\phi + \frac{2}{3}ma^2\dot{\theta}\dot{\phi}\operatorname{sen}\phi\cos\phi&\\ - mga\cos\theta + mg\frac{a}{2}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta = 0&\end{aligned} \tag{6}$$

$$\frac{ma^2}{4}\ddot{\theta}\cos\phi + \frac{ma^2}{3}\ddot{\phi} - \frac{ma^2}{3}\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\phi\cos\phi - mg\frac{a}{2}\cos\phi\cos\theta = 0 \tag{7}$$

4.— Ninguna de las coordenadas empleadas es cíclica, indicando que no se conservan los momentos generalizados correspondientes. Por otra parte, el sistema es conservativo por lo que se conservará la energía total:

$$E = T + V = \frac{ma^2}{2}\left[\frac{1}{3}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{3}\dot{\theta}^2(2+\operatorname{sen}^2\phi) + \frac{1}{2}\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\phi\right] - mga\left(\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\phi\cos\theta\right)\,. \tag{8}$$