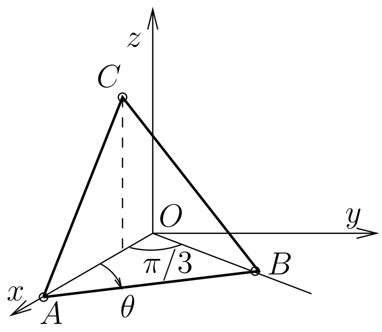
Mecánica

EXAMEN FINAL (10 de junio del 2006)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 5.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

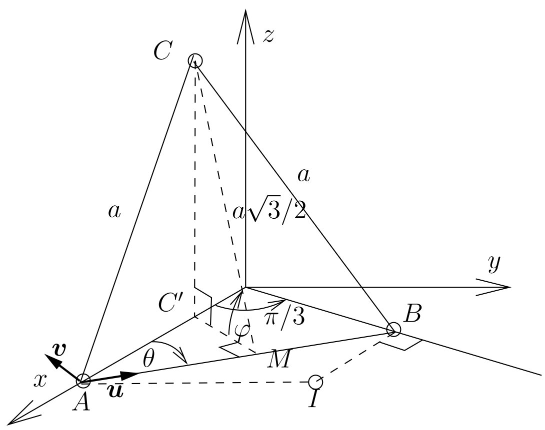
Se considera un triángulo equilátero ABC de lado a, cuyos vértices A y B están obligados a permanecer respectivamente sobre el eje Ox y una recta en el plano Oxy que forma 60° con Ox, mientras que el vértice C se mantiene dentro del plano Oxz. El punto A se ve sometido a un movimiento impuesto de forma que el ángulo θ que forma AB con el eje Ox^- tiene velocidad constante $\dot\theta = \omega_0$. Se pide:



1. Caracterizar el movimiento del triángulo, calculando la velocidad instantánea de rotación en una configuración genérica.
2. Discutir si el movimiento equivale o no a una rotación instantánea, obteniendo la velocidad mínima o velocidad de deslizamiento de los puntos del plano móvil y el eje helicoidal tangente.
3. Calcular la aceleración angular del sólido así como la velocidad y aceleración de C.

1.— El movimiento del triángulo puede caracterizarse como composición de dos rotaciones. En primer lugar, el giro θ de AB en el plano Oxy, alrededor de un eje paralelo a z por el punto I (figura adjunta). Por otra parte, la rotación φ alrededor del eje AB, que sirve para que el vértice C se mantenga sobre el plano Oxz.

Existe una relación entre los ángulos θ y φ que puede obtenerse considerando el segmento $C'M$ (M: punto medio de AB) en los triángulos rectángulos AMC' y $CC'M$:



$$\overline{MC'} = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\theta = a\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi \ \Rightarrow\ \sqrt{3}\operatorname{sen}\varphi = \operatorname{tg}\theta\,. \quad (1)$$

Derivando esta expresión se obtiene la relación entre las velocidades,

$$\dot\varphi = -\dot\theta\frac{1/\cos^2\theta}{\sqrt{3}\cos\varphi} = -\dot\theta\frac{1/\cos^2\theta}{\sqrt{3-\operatorname{tg}^2\theta}} = -\dot\theta\frac{1/\cos\theta}{\sqrt{4\cos^2\theta-1}}\,. \quad (2)$$

La velocidad angular resulta pues

$$\boldsymbol{\Omega} = -\dot\theta\,\boldsymbol{k} + \dot\varphi\,\boldsymbol{u}\,,$$

en función del vector unitario auxiliar $\boldsymbol{u}$ definido en la figura anterior.

2.— Los ejes de las dos rotaciones se cruzan en el espacio (recta vertical por I y recta AB), por lo que el movimiento conjunto no es una rotación instantánea, sino que se trata de un movimiento helicoidal general con deslizamiento. La velocidad de deslizamiento puede calcularse proyectando la de un punto cualquiera sobre la velocidad de rotación. En primer lugar obtendremos la velocidad de A. Teniendo en cuenta que donde $\overline{IA} = a(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta/\sqrt{3})$,

$$\boldsymbol{v}_A = \dot{\theta}\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{IA} = a\dot{\theta}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}} - \operatorname{sen}\theta\right)\boldsymbol{i}\,. \tag{3}$$

Otro procedimiento para obtener esta velocidad sería derivar directamente la coordenada de A:

$$x_A = \frac{a}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\theta + a\cos\theta \quad\Rightarrow\quad \dot{x}_A = a\dot{\theta}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}} - \operatorname{sen}\theta\right)\,.$$

Teniendo en cuenta (2) la proyección resulta

$$\boldsymbol{v}_A \cdot \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega} = a\dot{\theta}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}} - \operatorname{sen}\theta\right)\boldsymbol{i} \cdot \frac{-\dot{\theta}\,\boldsymbol{k} + \dot{\varphi}\,\boldsymbol{u}}{\sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2}} = a\dot{\theta}\frac{\left(\operatorname{sen}\theta - \frac{\cos\theta}{\sqrt{3}}\right)\cos\theta}{\sqrt{1 + \cos^2\theta(4\cos^2\theta - 1)}}\,.$$

3.— La aceleración angular se calcula derivando $\boldsymbol{\Omega}$,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t} = -\cancel{\ddot{\theta}\boldsymbol{k}} + \ddot{\varphi}\boldsymbol{u} + \dot{\varphi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \ddot{\varphi}\boldsymbol{u} - \dot{\varphi}\dot{\theta}\,\boldsymbol{v}\,,$$

donde se ha considerado $\mathrm{d}\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t = -\dot{\theta}\,\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{u} = -\dot{\theta}\,\boldsymbol{v}$, siendo $\boldsymbol{v}$ el vector unitario auxiliar definido en la figura anterior. Sustituyendo la expresión (2) y operando se obtiene finalmente

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\dot{\theta}^2}{\sqrt{4\cos^2\theta - 1}}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta(8\cos^2\theta - 1)}{\cos^2\theta(4\cos^2\theta - 1)}\boldsymbol{u} - \frac{1}{\cos\theta}\boldsymbol{v}\right)\,. \tag{4}$$

La velocidad de C se puede obtener desarrollando el campo de velocidades,

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{AC}\,;$$

considerando $\boldsymbol{r}_{AC} = -\frac{a}{2}\frac{1}{\cos\theta}\boldsymbol{i} + a\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{k}$ junto con las expresiones (3), (2) y (1) y operando se obtiene

$$\boldsymbol{v}_C = a\dot{\theta}\left(-\operatorname{sen}\theta - \frac{\operatorname{sen}\theta}{2\cos^2\theta} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta\right)\boldsymbol{i} - \frac{a}{2}\dot{\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta/\cos^2\theta}{\sqrt{4\cos^2\theta - 1}}\boldsymbol{k}\,. \tag{5}$$

De igual modo este valor se podría haber obtenido derivando las coordenadas de $\boldsymbol{r}_C = \left(a\cos\theta + \frac{a}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\theta - \frac{a}{2\cos\theta}\right)\boldsymbol{i} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{k}$.

Por último, la aceleración de C se obtiene derivando de nuevo (5):

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_C &= -a\dot{\theta}^2\left(\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\theta + \frac{1 + \operatorname{sen}^2\theta}{2\cos^3\theta}\right) \\
\ddot{z}_C &= a\frac{\sqrt{3}}{2}(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi) \\
&= -\frac{a}{2}\dot{\theta}^2\frac{1}{\cos^3\theta}\frac{1}{\sqrt{4\cos^2\theta - 1}}\left(\frac{\operatorname{sen}^2\theta(8\cos^2\theta - 1)}{4\cos^2\theta - 1} + 1\right)\,.
\end{aligned}$$