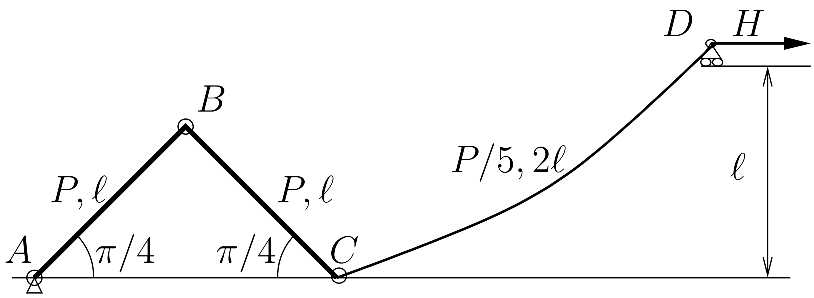
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO Y RECUPERACIÓN 4P (4 de septiembre del 2006)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

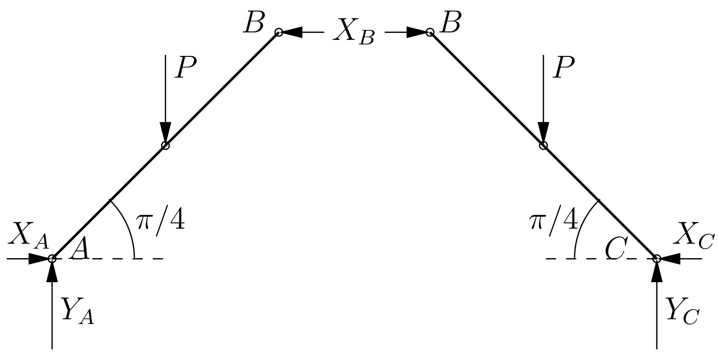
Ejercicio 3.º (puntuación: 10/45 ó 10/30) Tiempo: 60 min.



Se consideran dos barras AB y BC de peso P y longitud ℓ cada una, articuladas entre sí en B y situadas en un plano vertical. El extremo A está fijo mediante una rótula y el C apoyado sobre una recta horizontal rugosa a la misma altura que A, siendo el coeficiente de rozamiento $\mu = 1$. Se pide:

1. Comprobar que la configuración en que AB y AC forman $\pi/4$ con la horizontal es una posición de equilibrio para el valor dado de μ, y calcular las reacciones en A y C.

2. Se une ahora en C un cable flexible e inextensible, con longitud 2ℓ y peso total $P/5$, de forma que el otro extremo D del cable está situado a una altura fija ℓ sobre AC, tirándose de este punto con la máxima fuerza horizontal H antes de que C comience a deslizar. Obtener la configuración de equilibrio del cable y calcular la distancia horizontal entre C y D.

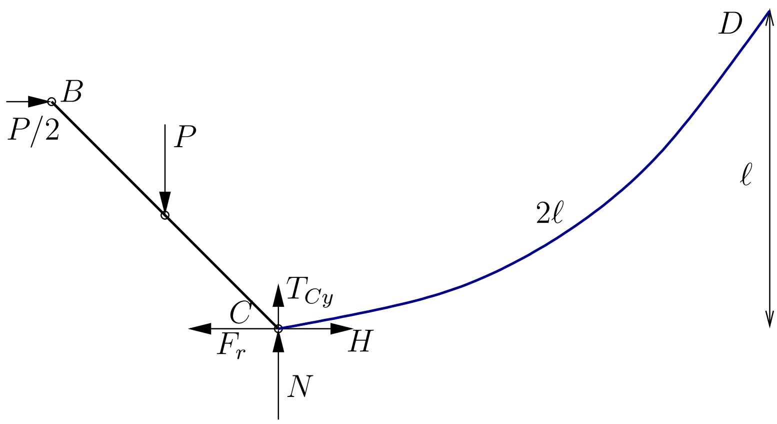


1.— Para el equilibrio se debe comprobar que la fuerza horizontal X_C es menor o igual que el máximo posible por el rozamiento μY_C. Para obtener las reacciones debemos separar las dos barras AB y AC y aplicar las ecuaciones cardinales de equilibrio a cada una (las ecuaciones cardinales en el conjunto ABC no son suficientes al no tratarse de un sólido rígido). Del equilibrio de fuerzas verticales se deduce $Y_A = Y_C = P$. El equilibrio de momentos sobre la barra AB en A arroja $X_B = P/2$. Por último, del equilibrio de fuerzas horizontales se obtiene $X_A = X_C = P/2$. En consecuencia se verifica el equilibrio ya que

$$X_C = \frac{P}{2} \leq \mu Y_C = P\,.$$

Sería un grave error tomar la fuerza de rozamiento en C como $\mu Y_C = P$, debido a que el rozamiento define una desigualdad ($\leq \mu P$), verificándose la igualdad ($= P$) únicamente en la situación límite de deslizamiento. Por otra parte, con este valor no se verificaría el equilibrio, como ha quedado patente arriba. Por último, si la situación de equilibrio estuviera en el límite de deslizamiento en C no se podría tirar de este punto con un cable sin romper el equilibrio.

2.— El cable ejerce una fuerza sobre C igual a su tensión en ese punto, con componentes H y T_{Cy} en direcciones horizontal y vertical respectivamente. El equilibrio de las barras AB y BC debe seguir siendo el mismo, por lo que las resultantes incluyendo estas nuevas fuerzas se conservan:



$$T_{Cy} + N = P; \quad F_r - H = \frac{P}{2}. \qquad (1)$$

Teniendo en cuenta que en el límite de deslizamiento será $F_r = \mu N = P - T_{Cy}$, de $(1)_2$ se deduce

$$T_{Cy} + H = \frac{P}{2}. \qquad (2)$$

La configuración del cable es una catenaria $y = a\cosh(x/a)$, cuyo vértice estará situado a la izquierda de C, de forma que las coordenadas (desconocidas a priori) de sus extremos serán x_C y x_D. La tensión horizontal es $H = qa$, mientras que la tensión vertical en C vale $T_{Cy} = qa\,\mathrm{senh}(x_C/a)$. La densidad lineal es $q = (P/5)/(2\ell)$. Sustituyendo estos valores en (2) resulta

$$\mathrm{senh}\,\frac{x_C}{a} + 1 = 5\frac{\ell}{a}. \qquad (3)$$

La configuración del cable queda definida por las incógnitas (a, x_C, x_D). Para resolverlas, además de (3) emplearemos por una parte la expresión de la longitud del cable entre C y D,

$$a\,\mathrm{senh}\,\frac{x_D}{a} - a\,\mathrm{senh}\,\frac{x_C}{a} = 2\ell, \qquad (4)$$

y por otra la expresión de la diferencia de cotas,

$$a\cosh\frac{x_D}{a} - a\cosh\frac{x_C}{a} = \ell. \qquad (5)$$

Para simplificar la escritura, reescribimos las ecuaciones (3), (4) y (5) usando las incógnitas adimensionales $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \ell/a, \alpha_C = x_C/a, \alpha_D = x_D/a$:

$$\begin{aligned} \mathrm{senh}\,\alpha_C + 1 &= 5\lambda \\ \mathrm{senh}\,\alpha_D - \mathrm{senh}\,\alpha_C &= 2\lambda \\ \cosh\alpha_D - \cosh\alpha_C &= \lambda. \end{aligned} \qquad (6)$$

Para resolver este sistema elevamos al cuadrado $\cosh\alpha_D$ en $(6)_3$ y tenemos en cuenta que $\cosh^2(\cdot) = 1 + \mathrm{senh}^2(\cdot)$ así como $(6)_1$ y $(6)_2$, obteniendo

$$23\lambda^2 - 4\lambda = 2\lambda\cosh\alpha_C. \qquad (7)$$

En esta expresión eliminamos en primer lugar $\lambda \neq 0$ y elevamos al cuadrado, empleando la misma técnica para eliminar las funciones hiperbólicas, llegándose finalmente a una ecuación cuadrática en λ de fácil solución:

$$429\lambda^2 - 144\lambda + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0{,}26540 \\ \lambda_2 = 0{,}070264 \end{cases}. \qquad (8)$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones $(6)_1$ se obtienen los valores correspondientes de (α_C, α_D). Se comprueba que con λ_2 no se cumplen las tres ecuaciones simultáneamente, lo que indica que esta es una solución espúrea que hemos introducido al elevar al cuadrado las expresiones. Por tanto la única solución válida es $\lambda = \lambda_1 = 0{,}26540$, resultando

$$a = \frac{\ell}{\lambda} = 3{,}7679\ell\,, \quad x_C = \alpha_C \frac{\ell}{\lambda} = 1{,}21115\ell\,, \quad x_D = \alpha_D \frac{\ell}{\lambda} = 2{,}92830\ell\,. \tag{9}$$

La distancia horizontal entre los extremos del cable resulta

$$x_{CD} = x_D - x_C = 1{,}7172\ell\,. \tag{10}$$