Mecánica

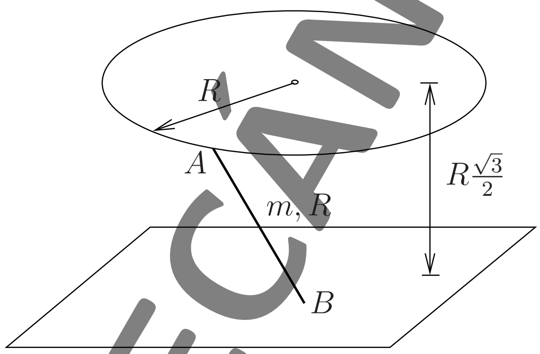
EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (4 de septiembre del 2006)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Una varilla homogénea pesada AB de longitud R y masa m se mueve de forma que uno de sus extremos A desliza sobre una circunferencia horizontal fija y lisa de radio R, y el otro extremo B desliza sobre un plano horizontal fijo y liso situado a una distancia $R\sqrt{3}/2$ debajo de la circunferencia.

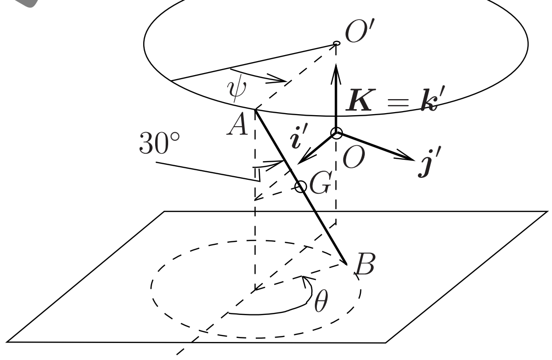
Se pide:



1. Expresión de la velocidad angular de la varilla;
2. Discutir y si procede calcular las posibles integrales primeras del movimiento de la varilla mediante los principios generales de Newton-Euler;

⋆

1. La varilla tiene 2 grados de libertad, que podemos asociar a dos giros ψ y θ. El ángulo ψ sitúa el extremo A de la varilla dentro de la circunferencia. Una vez localizado el extremo A, la varilla debe formar necesariamente 30° con la vertical para que su otro extremo B esté en contacto con el plano. Finalmente, cabe girar la varilla un ángulo θ alrededor de la vertical que pasa por A, tal y como muestra la figura adjunta. Obsérvese que este ángulo θ es relativo, midiéndose respecto de la dirección definida por el segmento $O'A$.



En base a la cinemática descrita se deduce inmediatamente que el movimiento es plano, puesto que la velocidad de cualquier punto de la varilla es horizontal, y su velocidad angular se expresa como:

$$\boldsymbol{\Omega} = (\dot{\psi} + \dot{\theta})\boldsymbol{K}$$

siendo $\boldsymbol{K}$ el versor que define la vertical ascendente.

2. Existen dos integrales primeras; una de ellas es la conservación de la energía total, puesto que ninguna de las fuerzas externas trabaja (podría hacerlo el peso, que es conservativo, si el movimiento de G no fuera horizontal). Además, teniendo en cuenta que G se mantiene siempre a la misma altura sobre el plano horizontal, la energía total coincide con la cinética sin más que hacer pasar el plano de potencial gravitatorio nulo por G. La energía se puede expresar como:

$$E = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega} \tag{1}$$

Por conveniencia se define un sistema auxiliar $\{O; \boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'\}$, siendo O el punto fijo que se encuentra en la mitad del segmento que une el centro de la circunferencia de radio R y el plano, y que por tanto se encuentra a la misma altura que G. El versor $\boldsymbol{i}'$ es horizontal y está contenido en el plano vertical que pasa por A, el $\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{K}$ y el $\boldsymbol{j}'$ es horizontal definiendo un triedro a derechas con los anteriores. Empleando este sistema auxiliar se puede calcular fácilmente la velocidad de G mediante la expresión $\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AG}$, obteniéndose:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_A = R\dot{\psi}\boldsymbol{j}' \quad , \qquad \boldsymbol{AG} &= \frac{R}{4}\cos\theta\boldsymbol{i}' + \frac{R}{4}\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{j}' - \frac{R\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{k}' \\
\boldsymbol{v}_G &= \left(-\frac{R}{4}\operatorname{sen}\theta(\dot{\psi}+\dot{\theta})\right)\boldsymbol{i}' + \left(\frac{R}{4}\cos\theta(\dot{\psi}+\dot{\theta}) + R\dot{\psi}\right)\boldsymbol{j}' \qquad (2) \\
v_G^2 &= \frac{R^2}{16}\left(\dot{\psi}+\dot{\theta}\right)^2 + R^2\dot{\psi}^2 + \frac{R^2}{2}\dot{\psi}\left(\dot{\psi}+\dot{\theta}\right)\cos\theta
\end{aligned}
$$

Para el segundo término de la energía cinética (1) es conveniente emplear un sistema de referencia $\{G; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ ligado a la varilla, de forma que $\boldsymbol{i}$ lleva la dirección de la varilla, $\boldsymbol{k}$ es perpendicular a ésta y está contenido en un plano vertical, y $\boldsymbol{j}$ es horizontal formando con los anteriores un triedro a derechas. En este sistema los distintos términos se expresan como:

$$
\boldsymbol{I}_G = \frac{1}{12}mR^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \qquad \boldsymbol{\Omega} = (\dot{\psi}+\dot{\theta})\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}\right) \qquad (3)
$$

de forma que se obtiene, después de algunas operaciones, la siguiente expresión para la energía total:

$$
E = \frac{1}{24}mR^2\left(\dot{\psi}+\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\psi}^2 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\psi}\left(\dot{\psi}+\dot{\theta}\right)\cos\theta
$$

La otra integral primera es la conservación de la proyección vertical del momento cinético de la varilla respecto de cualquier punto de la recta vertical que pasa por O. Esto es debido a que tanto la resultante del peso como la reacción en B son verticales, y la reacción en A corta en todo momento a la mencionada recta vertical. Esta integral primera se puede calcular, teniendo en cuenta que el punto fijo O no pertenece a la varilla, con la expresión:

$$
\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{K} = cte. \quad , \quad \text{con} \quad \boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{H}_G + m\boldsymbol{v}_G \wedge \boldsymbol{GO} \qquad (4)
$$

Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}$, las expresiones (3) y que $\boldsymbol{K} = -(\sqrt{3}/2)\boldsymbol{i} + (1/2)\boldsymbol{k}$, el primer término de (4) resulta:

$$
\boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{K} = \frac{1}{48}mR^2\left(\dot{\psi}+\dot{\theta}\right) \qquad (5)
$$

Para el segundo término de (4), teniendo en cuenta que $\boldsymbol{GO} = [-R - (R\cos\theta)/4]\boldsymbol{i}' - (R/4)\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{j}'$ y la expresión de $\boldsymbol{v}_G$ dada en (2), se obtiene:

$$
(m\boldsymbol{v}_G \wedge \boldsymbol{GO}) \cdot \boldsymbol{K} = mR^2\left[\frac{1}{16}(\dot{\psi}+\dot{\theta}) + \frac{1}{4}(\dot{\psi}+\dot{\theta})\cos\theta + \dot{\psi}\left(1 + \frac{1}{4}\cos\theta\right)\right] \qquad (6)
$$

y sumando (5) y (6) y operando se obtiene finalmente:

$$
\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{K} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\psi}\left(\frac{13}{6} + \cos\theta\right) + \frac{1}{4}mR^2\dot{\theta}\left(\frac{1}{3} + \cos\theta\right) = cte.
$$