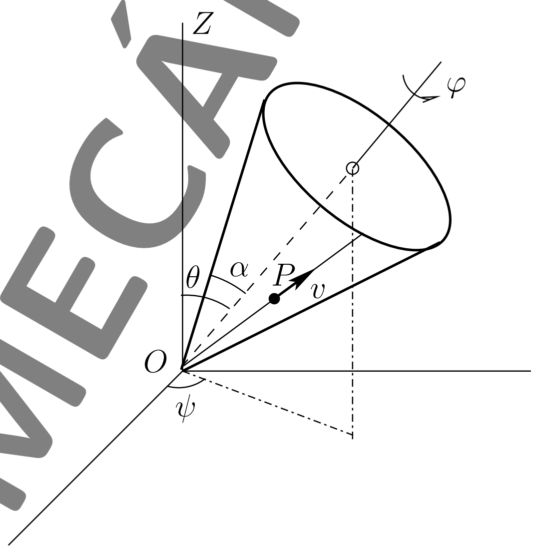
# Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (4 de septiembre de 2006)

*Apellidos* *Nombre* *N.º* *Grupo*

*Ejercicio 5.º* (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

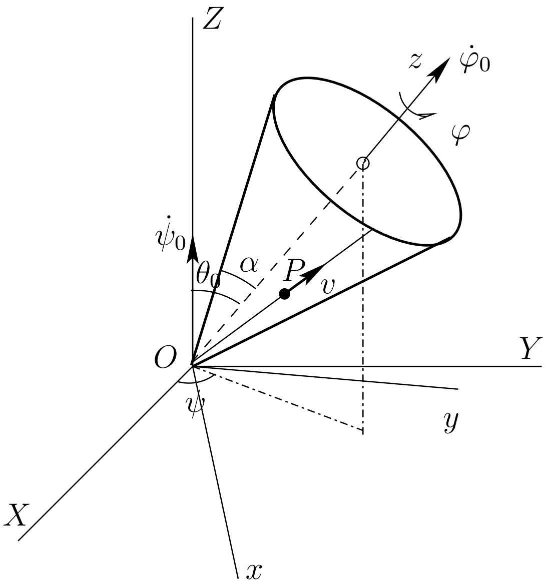
Un cono de semiángulo $\alpha$ se mueve con su vértice $O$ fijo, siendo constantes el ángulo que forma el eje de revolución del cono con el eje fijo $OZ$ de la figura, la velocidad de rotación $\dot{\psi}_0$ del eje del cono alrededor de $OZ$, y la velocidad de rotación $\dot{\varphi}_0$ del cono alrededor de su eje de revolución. Asimismo, un punto $P$ se mueve según una generatriz del cono, con velocidad relativa a la misma de valor $v$ constante, coincidiendo en el instante inicial el punto $P$ con el vértice $O$. Se pide:




1. Velocidad y aceleración angular del cono.
2. Velocidad y aceleración del punto del cono que en un instante genérico coincide con el punto $P$.
3. Velocidad y aceleración del punto $P$.

⋆

**1.** Se considera un triedro unido rígidamente al cono tal que $z$ corresponde al eje de revolución, y los ejes $x$, $z$ definen un plano que contiene a la generatriz por la que se mueve el punto $P$. Sean $\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}\}$ y $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ los versores que definen los triedros fijo y móvil, respectivamente (ver figura).




La velocidad angular es la composición del giro $\dot{\psi}_0$ alrededor del eje $\boldsymbol{K}$ fijo y $\dot{\varphi}_0$ alrededor del eje $\boldsymbol{k}$ móvil:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}_0 \boldsymbol{K} + \dot{\varphi}_0 \boldsymbol{k} \tag{1}$$

Tomando $\varphi = 0$ cuando $Ox$ coincide con $OX$, la expresión de $\boldsymbol{\Omega}$ en los ejes móviles es:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}_0 \operatorname{sen}\theta_0 \operatorname{sen}\varphi \boldsymbol{i} + \dot{\psi}_0 \operatorname{sen}\theta_0 \cos\varphi \boldsymbol{j} + (\dot{\psi}_0 \cos\theta_0 + \dot{\varphi}_0)\boldsymbol{k} \tag{2}$$

La aceleración angular $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ se obtiene derivando las componentes de (2) (es decir, la derivada relativa):

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\psi}_0 \dot{\varphi}_0 \operatorname{sen}\theta_0 \cos\varphi \boldsymbol{i} - \dot{\psi}_0 \dot{\varphi}_0 \operatorname{sen}\theta_0 \operatorname{sen}\varphi \boldsymbol{j} \tag{3}$$

Obsérvese que para obtener (3) se ha tenido en cuenta que en el sistema de referencia considerado las derivadas absoluta y relativa de $\boldsymbol{\Omega}$ coinciden.

**2.** La velocidad del punto $P^*$ del cono se obtiene a través de la expresión del campo de velocidades del sólido rígido:

$$\boldsymbol{v}_{P^*} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OP} \tag{4}$$

siendo:

$$\boldsymbol{OP} = vt(\operatorname{sen}\alpha\boldsymbol{i} + \cos\alpha\boldsymbol{k}) \tag{5}$$

Sustituyendo (2) y (5) en (4) y operando, resulta:

$$\begin{split}\boldsymbol{v}_{P^*} = vt\dot{\psi}_0 \operatorname{sen}\theta_0 \cos\varphi \cos\alpha\boldsymbol{i} + vt[(\dot{\psi}_0 \cos\theta_0 + \dot{\varphi}_0)\operatorname{sen}\alpha - \dot{\psi}_0 \operatorname{sen}\theta_0 \operatorname{sen}\varphi \cos\alpha]\boldsymbol{j} - \\ vt\dot{\psi}_0 \operatorname{sen}\theta_0 \cos\varphi \operatorname{sen}\alpha\boldsymbol{k}\end{split} \tag{6}$$

La aceleración se obtiene a través de la expresión del campo de aceleraciones del sólido rígido, sustituyendo en ésta las expresiones (2), (3) y (5), y operando:

$$\begin{split}\boldsymbol{a}_{P^*} = vt[\dot{\psi}_0^2(\cos\theta_0 \operatorname{sen}\theta_0 \operatorname{sen}\varphi\cos\alpha - \operatorname{sen}^2\theta_0\cos^2\varphi\operatorname{sen}\alpha - \cos^2\theta_0\operatorname{sen}\alpha) - 2\dot{\psi}_0\dot{\varphi}_0\cos\theta_0\operatorname{sen}\alpha - \\ \dot{\varphi}_0^2\operatorname{sen}\alpha]\boldsymbol{i} + vt\dot{\psi}_0^2\operatorname{sen}\theta_0\cos\varphi(\cos\theta_0\cos\alpha + \operatorname{sen}\theta_0\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\alpha)\boldsymbol{j} + \\ vt[\dot{\psi}_0^2\operatorname{sen}\theta_0(\cos\theta_0\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\theta_0\cos\alpha) + 2\dot{\psi}_0\dot{\varphi}_0\operatorname{sen}\theta_0\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\alpha]\boldsymbol{k}\end{split} \tag{7}$$

**3.** La velocidad del punto $P$ que se mueve sobre la generatriz del cono se obtiene sumando a la velocidad de arrastre $\boldsymbol{v}_{P^*}$ expresada en (6), el siguiente término correspondiente a la velocidad relativa:

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_{P^*} + \boldsymbol{v}_{\text{rel}} \tag{8}$$

siendo:

$$\boldsymbol{v}_{\text{rel}} = v(\operatorname{sen}\alpha\boldsymbol{i} + \cos\alpha\boldsymbol{k}) \tag{9}$$

La aceleración absoluta de $P$ se obtiene sumando a la aceleración de arrastre $\boldsymbol{a}_{P^*}$ expresada en (7), únicamente el término correspondiente a la aceleración de Coriolis $\boldsymbol{a}_{\text{cor}}$, ya que la aceleración relativa es nula por ser constante $v$:

$$\boldsymbol{a}_P = \boldsymbol{a}_{P^*} + \boldsymbol{a}_{\text{cor}} \tag{10}$$

donde:

$$\begin{split}\boldsymbol{a}_{\text{cor}} = 2\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{v}_{\text{rel}} = 2v\dot{\psi}_0\operatorname{sen}\theta_0\cos\varphi\cos\alpha\boldsymbol{i} + 2v[(\dot{\psi}_0\cos\theta_0 + \dot{\varphi}_0)\operatorname{sen}\alpha - \dot{\psi}_0\operatorname{sen}\theta_0\operatorname{sen}\varphi\cos\alpha]\boldsymbol{j} - \\ 2v\dot{\psi}_0\operatorname{sen}\theta_0\cos\varphi\operatorname{sen}\alpha\boldsymbol{k}\end{split} \tag{11}$$