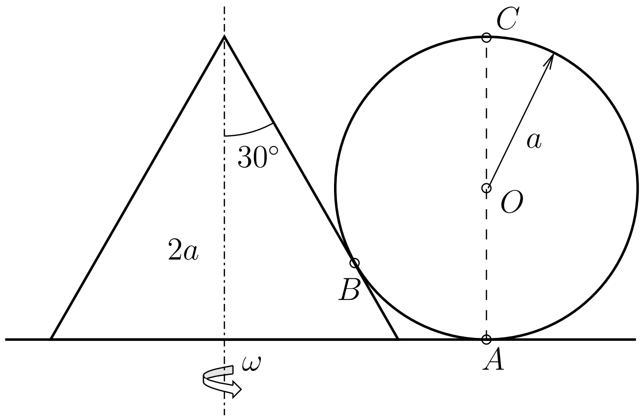
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (25 de noviembre del 2006)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Se considera una esfera de radio a que se mantiene en contacto con un plano y con un cono de revolución de semiángulo 30°, a través de una generatriz según indica la figura. El cono está fijo, con su eje perpendicular al plano y el vértice a distancia $2a$ del mismo. El plano tiene un movimiento de rotación alrededor del eje del cono y velocidad angular ω constante. La esfera rueda sin deslizar sobre ambas superficies, sabiéndose además que la velocidad de su centro O es en todo momento igual y de sentido opuesto a la velocidad del punto A del plano en contacto con la misma.

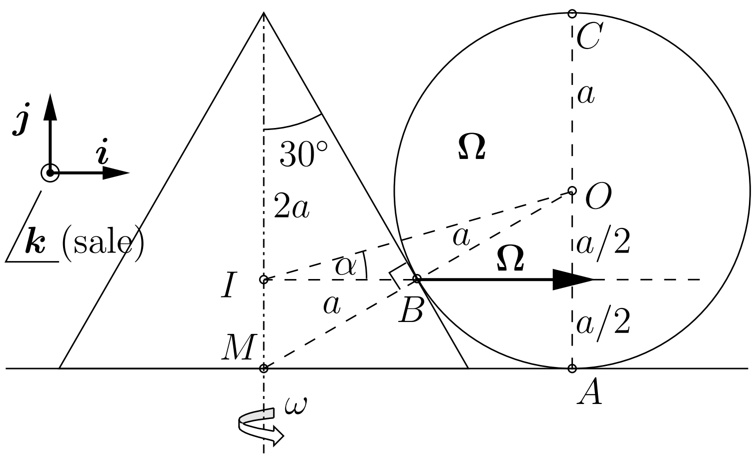


Se pide:

1. Velocidad angular de la esfera, identificando sus componentes de rodadura y pivotamiento sobre el cono.
2. Discutir el tipo de movimiento instantáneo, en concreto si se trata o no de una rotación pura y calcular la aceleración angular. Describir el lugar geométrico que define el eje helicoidal tangente en relación tanto al cono fijo como a la esfera móvil.
3. Velocidad y aceleración del punto C de la esfera que en cada instante está situado en la posición más alta de la misma.

⋆

1.— En primer lugar justificaremos la definición geométrica de la figura, lo que nos servirá para los cálculos del movimiento. La normal OB al plano tangente común entre esfera y cono forma 30° con la horizontal. Su prolongación corta a la base en un punto M que en este caso coincide con el centro de la misma. En efecto, $(\overline{MB}+\overline{BO})\operatorname{sen}30° = \overline{OA} = a$, por lo que $\overline{MB} = a$. Al valer la altura del cono $2a$, la distancia del centro de la base a la generatriz vale también a, por lo que M coincide con dicho centro.



Se sabe que el movimiento de la esfera es una rotación instantánea ya que la velocidad del punto B (igual para cono y esfera) es nula. Por tanto, el eje instantáneo de rotación (EIR) pasará por B. La velocidad de A (tanto de la esfera como del plano) es igual y vale $\boldsymbol{v}_A = -\omega\overline{MA}\,\boldsymbol{k} = -a\omega\sqrt{3}\,\boldsymbol{k}$. La velocidad del centro de la esfera es $\boldsymbol{v}_O = -\boldsymbol{v}_A = a\omega\sqrt{3}\,\boldsymbol{k}$. En consecuencia, el EIR pasará por el punto medio de OA y será horizontal. La velocidad angular vale

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega} = \omega 2\sqrt{3}\,\boldsymbol{i}\,.} \tag{1}$$

Las componentes de rodadura y pivotamiento sobre el cono son respectivamente

$$\boxed{\omega_r = \Omega \operatorname{sen} 30^\circ = \sqrt{3}\,\omega\,; \quad \omega_p = \Omega \cos 30^\circ = 3\omega\,.} \tag{2}$$

2.— Como se ha dicho antes el movimiento es una rotación instantánea. El EIR pertenece constantemente al plano meridional de la figura anterior, que contiene al eje My del cono, el centro de la esfera O y los puntos de contacto A y B. Este plano gira alrededor el eje My con velocidad $\omega_{pl}\,\boldsymbol{j}$ que se puede calcular igualando la velocidad de O como perteneciente al plano meridional y a la esfera:

$$-\,\omega_{pl} a\sqrt{3} = \Omega\frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_{pl} = -\omega\,. \tag{3}$$

La velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$ tiene módulo constante y gira con velocidad $\omega_{pl}\,\boldsymbol{j}$, por lo que su derivada es

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \omega_{pl}\,\boldsymbol{j} \wedge \omega 2\sqrt{3}\,\boldsymbol{i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \omega^2 2\sqrt{3}\,\boldsymbol{k}\,.} \tag{4}$$

A lo largo del movimiento el EIR describe un plano horizontal por I (axoide fijo). En relación a la esfera describe un cono con eje de revolución IO y semiángulo $\alpha = \arctan(\sqrt{3}/6)$ (axoide móvil). El movimiento de la esfera equivale al cono del axoide móvil rodando sin deslizar sobre el plano del axoide fijo.

3.— La velocidad de C se calcula como

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{IC} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{v}_C = a\omega 3\sqrt{3}\,\boldsymbol{k}\,.} \tag{5}$$

La aceleración se obtiene mediante

$$\boldsymbol{a}_C = \cancelto{0}{\boldsymbol{a}_I} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{r}_{IC} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{IC}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{a}_C = -12a\omega^2\,\boldsymbol{j} - a\omega^2 3\sqrt{3}\,\boldsymbol{k}\,.} \tag{6}$$