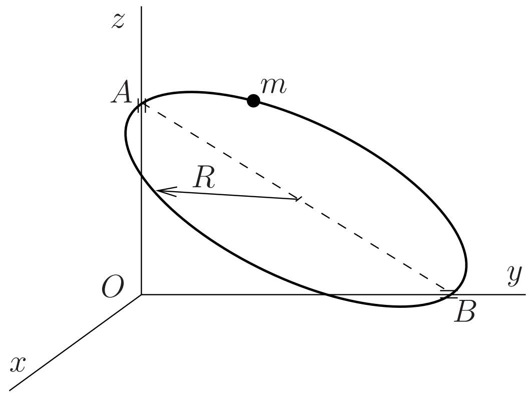
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (25 de noviembre del 2006)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Una partícula pesada de masa m se mueve con ligadura bilateral lisa en un aro de radio R. El movimiento de este aro es tal que el extremo A de uno de sus diámetros desliza sobre el eje vertical fijo z, y su otro extremo B sobre el eje fijo y. Además, la velocidad de rotación de este diámetro AB es constante, de valor ω, y el plano del aro se mantiene siempre perpendicular al plano Oyz. En el instante inicial B se encuentra en el origen O y por debajo de A.

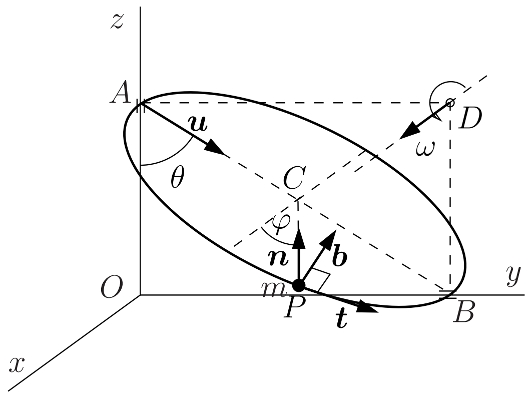


Se pide:

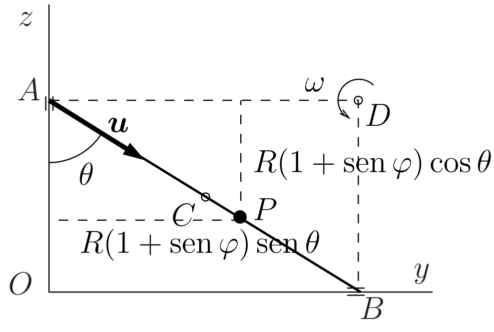
1. Obtener la ecuación diferencial del movimiento de la partícula;
2. Obtener la reacción que ejerce el aro sobre la partícula en una posición genérica en función del grado o grados de libertad y sus derivadas.

⋆

1.— En primer lugar observamos que no se conserva ni la energía mecánica ni ninguna componente de momento cinético o cantidad de movimiento, debido a las fuerzas aplicadas del peso y de la reacción del aro. Aunque ésta sea normal al aro realiza un trabajo debido al movimiento impuesto. La solución del problema se realizará mediante la ecuación fundamental de la dinámica de la partícula, $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$.



El movimiento del aro se caracteriza por el ángulo $\theta = \omega t$ que forma el diámetro AB con el eje Oz descendente según se indica en la figura. Además, la posición de la partícula m sobre el aro en un instante genérico se puede definir mediante el ángulo φ que forma con el diámetro paralelo a Ox. Denominamos C al centro del aro y P al punto que ocupa la partícula. En éste se pueden definir los vectores $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ tangente, normal y binormal al aro respectivamente, así como el vector unitario auxiliar $\boldsymbol{u}$ en dirección de AB:



$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{t} &= -\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{u} \\
&= -\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi(\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j} - \cos\theta\,\boldsymbol{k})\,, \\
\boldsymbol{n} &= -\cos\varphi\,\boldsymbol{i} - \operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{u} \\
&= -\cos\varphi\,\boldsymbol{i} - \operatorname{sen}\varphi(\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j} - \cos\theta\,\boldsymbol{k})\,, \\
\boldsymbol{b} &= \boldsymbol{t}\wedge\boldsymbol{n} = \cos\theta\,\boldsymbol{j} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{k}\,.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Para obtener la expresión de la aceleración emplearemos la descomposición del movimiento relativo al aro, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\text{arr}} + \boldsymbol{a}_{\text{rel}} + \boldsymbol{a}_{\text{cor}}$. El movimiento de arrastre debido al aro es una rotación instantánea alrededor de un eje paralelo a Ox pasando por D indicado en la figura, como es fácil deducir del movimiento plano de rotación de AB dentro del plano Oyz, siendo la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega} = \omega\,\boldsymbol{i}$, constante. Aunque para el campo de velocidades el punto de referencia más indicado es D, para el campo de aceleraciones no resulta tan conveniente, ya que su aceleración no es nula, a pesar de que la velocidad sí lo sea. Desarrollaremos la aceleración de arrastre a partir de la del punto A, teniendo en cuenta que $\boldsymbol{a}_A = -2R\omega^2\cos\theta\,\boldsymbol{k}$ y que $\boldsymbol{r}_{AP} = R(1+\operatorname{sen}\varphi)\,\boldsymbol{u} + R\cos\varphi\,\boldsymbol{i}$, resultando:

$$\boldsymbol{a}_{\text{arr}} = \boldsymbol{a}_A + \overset{\mathbf{0}}{\cancel{\dot{\boldsymbol{\Omega}}}} \wedge \boldsymbol{r}_{AP} + \boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{r}_{AP}) = -2R\omega^2\cos\theta\,\boldsymbol{k} - R\omega^2(1+\operatorname{sen}\varphi)\boldsymbol{u}\,. \tag{2}$$

En función de los vectores del triedro intrínseco las otras componentes de la aceleración son

$$\boldsymbol{a}_{\text{rel}} = R\ddot{\varphi}\,\boldsymbol{t} + R\dot{\varphi}^2\,\boldsymbol{n}\,, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{a}_{\text{cor}} = 2\boldsymbol{\Omega}\wedge(R\dot{\varphi}\,\boldsymbol{t}) = 2\omega\dot{\varphi}R\cos\varphi\,\boldsymbol{b}\,. \tag{4}$$

Por último consideramos las fuerzas sobre la partícula, que provienen de su peso y de las reacciones en el plano del aro R_n y perpendicular a este R_b, con lo cual se expresa la ecuación vectorial de la dinámica,

$$-\,mg\,\boldsymbol{k} + R_n\,\boldsymbol{n} + R_b\,\boldsymbol{b} = m(\boldsymbol{a}_{\text{arr}} + \boldsymbol{a}_{\text{rel}} + \boldsymbol{a}_{\text{cor}})\,. \tag{5}$$

Proyectando esta ecuación sobre la tangente $\boldsymbol{t}$ al aro se obtiene la ecuación (escalar) de la dinámica en función del (único) grado de libertad φ y sus derivadas:

$$\boxed{mg\cos\varphi\cos\theta = mR\omega^2\cos\varphi(2\cos^2\theta - 1 - \operatorname{sen}\varphi) + mR\ddot{\varphi}\,.} \tag{6}$$

(El parámetro $\theta = \omega t$ define un movimiento prescrito y no es por tanto un grado de libertad.)

2.— Para obtener R_n podemos proyectar (5) según $\boldsymbol{n}$, resultando

$$\boxed{R_n = mg\operatorname{sen}\varphi\cos\theta - mR\omega^2\operatorname{sen}\varphi(2\cos^2\theta - 1 - \operatorname{sen}\varphi) + mR\dot{\varphi}^2\,.} \tag{7}$$

Ahora bien, si proyectamos (5) según $\boldsymbol{i}$ resulta una expresión equivalente más sencilla,

$$\boxed{R_n = mR\ddot{\varphi}\operatorname{tg}\varphi + mR\dot{\varphi}^2\,.} \tag{8}$$

(Observación: Puede comprobarse que (8) equivale a (7) + (6) $\times \operatorname{tg}\varphi$; se hace notar también que (8) sería singular para $\varphi = \pi/2$, en cuyo caso tendría que emplearse (7).)

Por último, para obtener R_b proyectamos (5) según $\boldsymbol{b}$, resultando

$$\boxed{R_b = mg\operatorname{sen}\theta - 2m\omega^2 R\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 2m\omega\dot{\varphi}R\cos\varphi\,.} \tag{9}$$