Mecánica

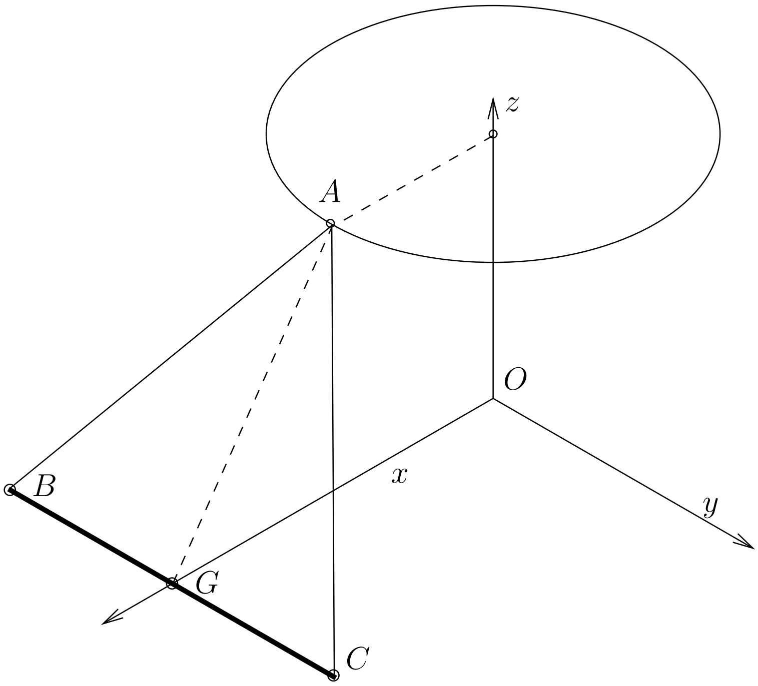
EXAMEN PARCIAL (9 de febrero del 2007)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Un triángulo equilátero rígido de lado $2a$ está formado por dos varillas AB y AC de masa despreciable y la barra BC uniforme con masa m. El sistema mecánico se mueve de forma que A describe una circunferencia de ecuación $x^2+y^2=a^2;\ z=\sqrt{2}a$. La barra BC está siempre apoyada sobre el plano horizontal Oxy, y todos los vínculos son lisos. En el movimiento más general posible, se pide:

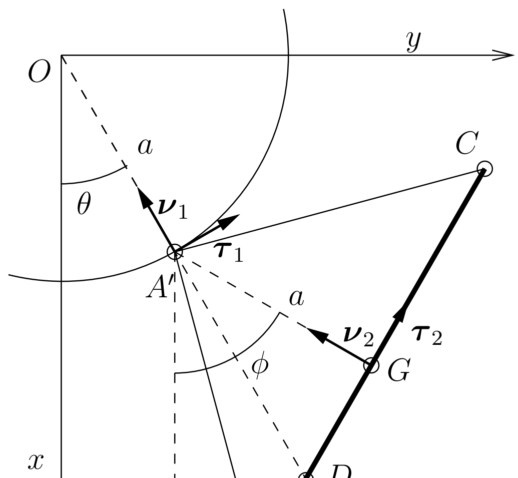
1. Describir el movimiento eligiendo unos parámetros adecuados para caracterizarlo y obtener las ecuaciones diferenciales de la dinámica, aplicando los teoremas generales (Newton-Euler). Las condiciones iniciales son $\boldsymbol{v}_A = v_0\,\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{0}$, y la altura del triángulo contenida en el plano Oxz.
2. Calcular la reacción de la circunferencia sobre el vértice A del triángulo, en función de los parámetros y sus derivadas.



(posición inicial)

⋆

1.— El sistema tiene dos grados de libertad, el giro de A recorriendo la circunferencia, definido por el ángulo θ, y el giro del triángulo alrededor de un eje vertical por A, definido por el ángulo ϕ. En la figura adjunta se dibuja la proyección sobre el plano horizontal Oxy. La altura del triángulo mide $\overline{AG}=\sqrt{3}a$ y su proyección horizontal $\overline{A'G}=a$. Emplearemos los vectores unitarios auxiliares $(\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\nu}_1)$ y $(\boldsymbol{\tau}_2,\boldsymbol{\nu}_2)$ para caracterizar el movimiento.



El sistema es conservativo, ya que los enlaces son lisos. Por tanto una de las ecuaciones diferenciales del movimiento (integral primera) será la conservación de la energía, que en este caso coincidirá además con la cinética ya que la energía potencial no sufre variación en el movimiento horizontal de la barra. Teniendo en cuenta la velocidad de G

$$\boldsymbol{v}_G = a\dot{\theta}\,\boldsymbol{\tau}_1 + a\dot{\phi}\,\boldsymbol{\tau}_2\,, \tag{1}$$

se obtiene

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}m(2a)^2\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}ma^2[\dot{\theta}^2+\dot{\phi}^2+2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\phi-\theta)] + \frac{1}{6}ma^2\dot{\phi}^2\,. \tag{2}$$

Desarrollando esta expresión y teniendo en cuenta las condiciones iniciales ($\theta_0 = \phi_0 = 0, \dot\theta_0 = v_0/a, \dot\phi_0 = -v_0/a$) se obtiene:

$$\frac{1}{2}\dot\theta^2 + \frac{2}{3}\dot\phi^2 + \dot\theta\dot\phi\cos(\phi-\theta) = \frac{1}{6}\frac{v_0^2}{a^2}\,. \tag{3}$$

La otra ecuación que consideramos es también una integral primera, la conservación del momento cinético respecto del eje Oz. En efecto, las fuerzas externas sobre la barra BC son paralelas a Oz y la reacción en A de la circunferencia corta al eje Oz, lo que se deduce inmediatamente al considerar que la circunferencia es lisa y la reacción debe ser normal a la misma. El momento cinético respecto de O es

$$\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{r}_G \wedge m\boldsymbol{v}_G + \frac{1}{3}ma^2\dot\phi\,\boldsymbol{k}\,, \tag{4}$$

y considerando $\boldsymbol{r}_G = -a\,\boldsymbol{\nu}_1 - a\,\boldsymbol{\nu}_2$ y desarrollando la expresión,

$$H_z = \boldsymbol{H}_O\cdot\boldsymbol{k} = ma^2(\dot\theta+\dot\phi)[1+\cos(\phi-\theta)] + \frac{1}{3}ma^2\dot\phi\,. \tag{5}$$

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales la ecuación resulta

$$(\dot\theta+\dot\phi)[1+\cos(\phi-\theta)] + \frac{1}{3}\dot\phi = -\frac{1}{3}\frac{v_0}{a}\,. \tag{6}$$

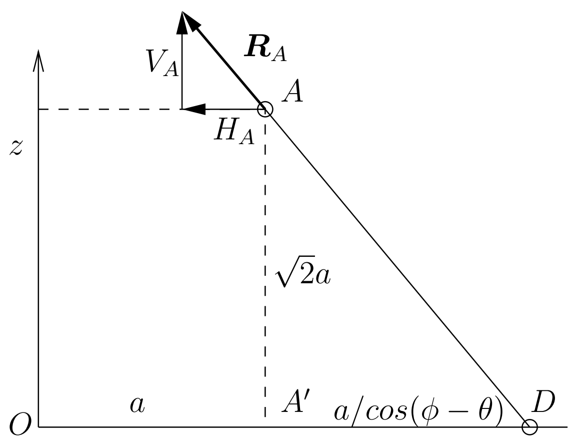
Las dos ecuaciones (3) y (6) sirven para definir la dinámica.

2.— Calcularemos en primer lugar la componente horizontal de la reacción en A, que sabemos que debe estar dirigida según $\boldsymbol{\nu}_1$ al ser liso el enlace. Es la única fuerza horizontal sobre el triángulo, por lo que bastará calcular la aceleración de G:

$$\boldsymbol{a}_G = a\ddot\theta\,\boldsymbol{\tau_1} + a\dot\theta^2\,\boldsymbol{\nu}_1 + a\ddot\phi\,\boldsymbol{\tau_2} + a\dot\phi^2\,\boldsymbol{\nu}_2\,, \tag{7}$$

$$H_A = m\boldsymbol{a}_G\cdot\boldsymbol{\nu}_1 = ma[\dot\theta^2 + \ddot\phi\,\mathrm{sen}(\phi-\theta) + \dot\phi^2\cos(\phi-\theta)]\,. \tag{8}$$

Para calcular la componente vertical V_A tendremos en cuenta que la reacción debe estar contenida en el plano del triángulo ABC, ya que del punto A se transmitirá a la barra BC a través de los esfuerzos (axiales) en las dos varillas sin masa AB y AC. Por consiguiente llevará la dirección de AD, siendo D el corte de la prolongación de OA' con la barra AB (ver figura en página anterior). En la figura adjunta se dibuja el plano vertical por OA, que contiene a la reacción $\boldsymbol{R}_A$. Teniendo en cuenta que $\angle GA'D = \phi-\theta$ se obtiene $\overline{A'D} = a/\cos(\phi-\theta)$, permitiendo obtener la componente vertical:



$$V_A = H_A\frac{\sqrt{2}a}{a/\cos(\phi-\theta)} = H_A\sqrt{2}\cos(\phi-\theta)\,. \tag{9}$$

La expresión final de la reacción resulta por tanto

$$\boldsymbol{R}_A = ma[\dot\theta^2 + \ddot\phi\,\mathrm{sen}(\phi-\theta) + \dot\phi^2\cos(\phi-\theta)](\boldsymbol{\nu}_1 + \sqrt{2}\cos(\phi-\theta)\boldsymbol{k})\,. \tag{10}$$