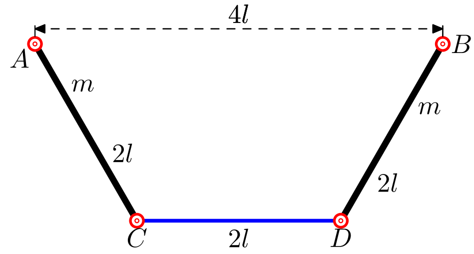
Mecánica

EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTRAORDINARIO (9 de febrero del 2007)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/30 ó 10/45) Tiempo: 60 min.

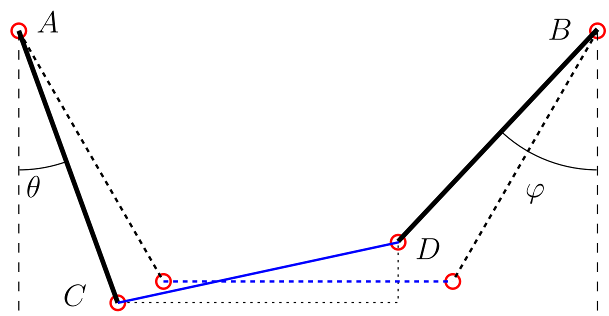
Un sistema está formado por dos varillas de masa m y longitud $2l$, unidas mediante articulaciones a dos puntos fijos A y B, situados en la misma horizontal y distantes $4l$. Los extremos opuestos están unidos entre sí mediante una varilla inextensible sin masa de longitud $2l$ que se articula en sus extremos. El movimiento tiene lugar en un plano vertical. Considerando la restricción correspondiente a la varilla sin masa mediante la técnica de los multiplicadores de Lagrange, se pide:



1. Coordenadas generalizadas, expresión de la restricción y grados de libertad del sistema.
2. Obtener las ecuaciones de Lagrange del movimiento.
3. Obtener el valor del esfuerzo en la varilla de unión en función de las coordenadas y sus derivadas. Calcular igualmente la reacción en A.

⋆

1.— El sistema tiene un solo grado de libertad: el giro de una de las dos barras obliga a la otra a través de la varilla CD que las conecta. Sin embargo, tal y como pide el enunciado, definiremos la configuración general en función de coordenadas (θ, φ) *no libres*, sujetas a la ligadura de distancia constante $2l$ entre C y D:



$$(2l)^2 = (4l - 2l\operatorname{sen}\theta - 2l\operatorname{sen}\varphi)^2 + (2l\cos\theta - 2l\cos\varphi)^2\,, \quad (1)$$

que simplificando da lugar a

$$5 = 2\cos(\varphi + \theta) + 4(\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\varphi)\,. \quad (2)$$

Aunque esta ecuación de ligadura es holónoma, puede comprobarse que eliminar en ella alguna de las dos coordenadas resulta en expresiones complejas, con solución no única y difíciles de manejar. Por ello en este caso resulta conveniente plantear las ecuaciones con coordenadas no libres considerando explícitamente la ligadura mediante multiplicadores de Lagrange.

2.— Obtendremos en primer lugar la relación entre las variaciones de las coordenadas, derivando en (2),

$$0 = -2\operatorname{sen}(\varphi + \theta)(\delta\varphi + \delta\theta) + 4\cos\theta\delta\theta + 4\cos\varphi\delta\varphi\,, \quad (3)$$

y agrupando se identifican los coeficientes correspondientes:

$$0 = A_\theta\delta\theta + A_\varphi\delta\varphi = [4\cos\theta - 2\operatorname{sen}(\varphi + \theta)]\delta\theta + [4\cos\varphi - 2\operatorname{sen}(\varphi + \theta)]\delta\varphi\,. \quad (4)$$

En función de (θ, φ) la Lagrangiana vale

$$L = \frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{2}{3}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\theta + mgl\cos\varphi\,. \tag{5}$$

Empleando el multiplicador λ para la ligadura, las ecuaciones de Lagrange resultan

$$\frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta} + mgl\,\mathrm{sen}\,\theta = \lambda[4\cos\theta - 2\,\mathrm{sen}(\varphi+\theta)]\,; \tag{6}$$

$$\frac{4}{3}ml^2\ddot{\varphi} + mgl\,\mathrm{sen}\,\varphi = \lambda[4\cos\varphi - 2\,\mathrm{sen}(\varphi+\theta)]\,. \tag{7}$$

Estas dos ecuaciones junto con la ecuación de la restricción (2) sirven para resolver las tres incógnitas $(\theta, \varphi, \lambda)$.

3.— El término a la derecha del signo = en cada una de las ecuaciones (6) y (7) representa la fuerza generalizada debida a la varilla CD sobre cada coordenada θ y φ respectivamente. Al ser estas coordenadas giros, las fuerzas generalizadas correspondientes son momentos, debidos al esfuerzo transmitido por la varilla CD a cada barra en A y B respectivamente. Si denominamos N a este esfuerzo (positivo: tracción en CD), el momento en A, por ejemplo, denominando α al ángulo que forma CD con la horizontal, sería:

$$N\cos\alpha 2l\cos\theta + N\,\mathrm{sen}\,\alpha 2l\,\mathrm{sen}\,\theta\,, \tag{8}$$

y teniendo en cuenta $\cos\alpha = 2 - \mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}\,\varphi$, $\mathrm{sen}\,\alpha = \cos\theta - \cos\varphi$, se obtiene dicho momento como

$$2Nl(2\cos\theta - \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi - \mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi)\,. \tag{9}$$

Comparando esta expresión con el lado derecho de (6) se deduce inmediatamente que $\lambda = Nl$. Por tanto podemos expresar el esfuerzo N como

$$N = \frac{\lambda}{l} = m\frac{(4/3)l\ddot{\theta} + g\,\mathrm{sen}\,\theta}{4\cos\theta - 2\,\mathrm{sen}(\varphi+\theta)}\,. \tag{10}$$

Por último, para obtener la reacción en A expresamos la ecuación dinámica del movimiento del CDM (G) de la varilla AC:

$$\boldsymbol{R}_A + \boldsymbol{N} - mg\,\boldsymbol{j} = m\boldsymbol{a}_G\,, \tag{11}$$

de donde resulta:

$$R_{Ax} = -m\frac{(4/3)l\ddot{\theta} + g\,\mathrm{sen}\,\theta}{4\cos\theta - 2\,\mathrm{sen}(\varphi+\theta)}(2 - \mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}\,\varphi) + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,; \tag{12}$$

$$R_{Ay} = -m\frac{(4/3)l\ddot{\theta} + g\,\mathrm{sen}\,\theta}{4\cos\theta - 2\,\mathrm{sen}(\varphi+\theta)}(\cos\theta - \cos\varphi) + mg + ml\ddot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + ml\dot{\theta}^2\cos\theta\,. \tag{13}$$