Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

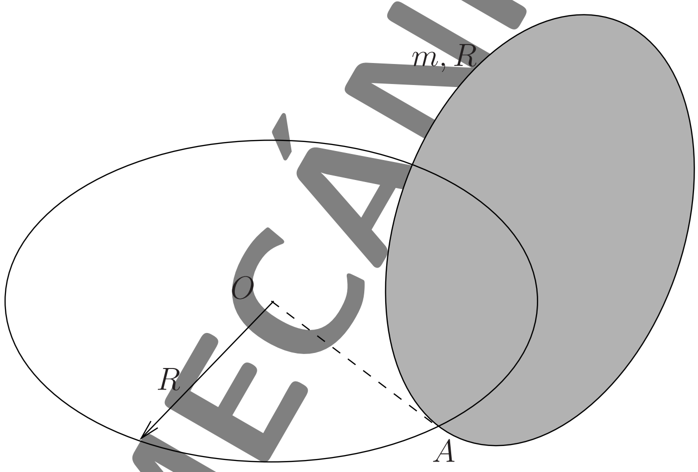
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (9 de febrero de 2007)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Un punto A del borde de un disco homogéneo pesado de masa m y radio R está obligado a moverse en una circunferencia horizontal fija y lisa de centro O y radio R. La ligadura en el punto A es una articulación que permite al disco girar libremente alrededor del radio OA manteniéndose en todo instante perpendicular a dicho radio.



Se pide:

1. Obtener la expresión de la velocidad de rotación del disco en función de los grados de libertad y sus derivadas;

2. Obtener las ecuaciones del movimiento del disco mediante la aplicación de los principios de Newton-Euler;

3. Obtener el momento que la articulación A debe ejercer sobre el disco para que éste permanezca vertical;

⋆

1. El disco tiene dos grados de libertad, que representamos mediante el ángulo ψ que situa el punto A sobre la circunferencia (que coincide con el ángulo girado por el disco alrededor de la vertical), y el ángulo φ que forma el diámetro del disco que pasa por A con el plano horizontal.(ver Figura 1).

Por conveniencia se define el triedro ortonormal $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ con origen en A, que se mueve de forma que $\boldsymbol{i}$ siempre es horizontal en dirección OA, $\boldsymbol{k}$ siempre vertical, y $\boldsymbol{j}$ por tanto siempre está contenido en el plano del disco.

En base a lo anterior, la expresión de la velocidad de rotación del disco resulta:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{k} + \dot{\varphi}\boldsymbol{i}$$

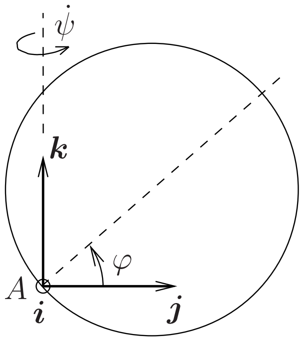


Figura 1: *Vista del disco en verdadera maginitud*

2. Existen dos integrales primeras. La primera de ellas es la constancia de la componente vertical del momento cinético del disco en O, debido a que O se puede considerar como punto del sólido, y en él no hay momentos verticales de fuerzas externas.

CÁTEDRA DE MECÁNICA

Por tanto, el momento cinético en O puede calcularse considerando al disco como un sólido con punto fijo ($\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}$) o a través de G, con $\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} + m\boldsymbol{v}_G \wedge \boldsymbol{GO}$. Procediendo de esta última manera, y teniendo en cuenta que el tensor central de inercia se expresa en el triedro $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ como:

$$\boldsymbol{I}_G = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad A = 2B = \frac{1}{2}mR^2 \ ,$$

que la velocidad $\boldsymbol{v}_G$ es:

$$\boldsymbol{v}_G = -R\dot{\psi}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AG} = R\dot{\psi}\cos\varphi\boldsymbol{i} + R(\dot{\psi} - \dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi)\boldsymbol{j} + R\dot{\varphi}\cos\varphi\boldsymbol{k}$$

y que $\boldsymbol{GO} = -R\boldsymbol{i} - R\cos\varphi\boldsymbol{j} - R\,\mathrm{sen}\,\varphi\boldsymbol{k}$, se obtiene finalmente, después de algunas operaciones:

$$\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{k} = mR^2 \left[\dot{\psi}\left(\frac{5}{4} + \cos^2\varphi\right) - \dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right] = cte.$$

La otra integral primera es la constancia de la energía total del disco, ya que la única fuerza que trabaja, que es el peso, es conservativa, y los enlaces son lisos. De nuevo, es posible calcular la energía cinética a través del punto fijo O o a través de G. Procediendo de esta última manera se obtiene:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}) + mgR\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ &= \frac{1}{2}mR^2 \left[\dot{\psi}^2\left(\frac{5}{4} + \cos^2\varphi\right) + \frac{3}{2}\dot{\varphi}^2 - 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right] + mgR\,\mathrm{sen}\,\varphi = cte. \end{aligned}$$

3. Para calcular el momento pedido, planteamos el principio del momento cinético en G según la dirección $\boldsymbol{j}$:

$$\boldsymbol{M}_G \cdot \boldsymbol{j} = \frac{d\boldsymbol{H}_G}{dt} \cdot \boldsymbol{j} \tag{1}$$

El momento de de las fuerzas en G se calcula a partir del de A mediante $\boldsymbol{M}_G = \boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{r}_{GA} \wedge \boldsymbol{R}_A$, siendo $\boldsymbol{R}_A$ la reacción que ejerce la circunferencia sobre el disco en A. Llamando M_A al momento ejercido por la articulación en A según $\boldsymbol{j}$ y H_A a la componente horizontal (según $\boldsymbol{i}$) de la reacción en A, se obtiene:

$$\boldsymbol{M}_G \cdot \boldsymbol{j} = M_A - H_A R\,\mathrm{sen}\,\varphi \tag{2}$$

La reacción H_A se obtiene planteando el principio de la cantidad de movimiento según $\boldsymbol{i}$:

$$H_A = m\boldsymbol{a}_G \cdot \boldsymbol{i} \tag{3}$$

La aceleración de G se puede obtener mediante la expresión del campo de aceleraciones de un sólido rígido a partir de A, o bien apoyándose en el sistema móvil auxiliar $\{A; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ y obteniendo los términos relativo, arrastre y Coriolis. De cualquiera de estas maneras se obtiene:

$$\boldsymbol{a}_G \cdot \boldsymbol{i} = R\left[-\dot{\psi}^2 - \ddot{\psi}\cos\varphi + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right] \tag{4}$$

Por otro lado se puede calcular la derivada de $\boldsymbol{H}_G$ empleando el sistema móvil auxiliar:

$$\boldsymbol{M}_G = \frac{d\boldsymbol{H}_G}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{H}_G}{dt}\right)_{rel} + \dot{\psi}\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{H}_G = \frac{1}{4}mR^2\left[2\ddot{\varphi}\boldsymbol{i} + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\boldsymbol{j} + \ddot{\psi}\boldsymbol{k}\right] \tag{5}$$

Combinando (1), (2), (3), (4) y (5) se obtiene finalmente:

$$M_A = mR^2\left[\frac{1}{2}\dot{\psi}\dot{\varphi} + \mathrm{sen}\,\varphi\left(-\dot{\psi}^2 - \ddot{\psi}\cos\varphi + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right)\right]$$

CÁTEDRA DE MECÁNICA