Mecánica

EXAMEN PARCIAL (24 de marzo del 2007)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Se considera el movimiento general de un sólido rígido por inercia, es decir sin fuerzas aplicadas. *Expresar* y *justificar* las magnitudes cinemáticas y cinéticas que se conservan en dicho movimiento. *Precisar* las peculiaridades que se añaden si el sólido es de revolución. APLICACIÓN: un sólido S está constituido por dos discos iguales (de masa m y radio r) unidos por una varilla de masa despreciable y longitud $2r$ según su eje común de revolución. Se fija el punto medio de este eje y se imprime a S una velocidad $\boldsymbol{\Omega}$ que forma un ángulo α con el eje. *Obtener* los valores de las magnitudes antes indicadas. (5 ptos.)

Al no haber fuerzas aplicadas *se conserva el momento cinético* $\boldsymbol{H}_G$:

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{M}_G = \frac{d\boldsymbol{H}_G}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H}_G = \mathbf{cte} = H\boldsymbol{K} \tag{1}$$

La energía cinética T es constante. Debido a la constancia de $\boldsymbol{H}_G$:

$$0 = \frac{d\boldsymbol{H}_G}{dt} = \boldsymbol{I}_G\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{I}_G\Omega) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_G\dot{\boldsymbol{\Omega}} = 0 \tag{2}$$

y teniendo en cuenta al derivar T que $\boldsymbol{I}_G$ es simétrico:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_G\boldsymbol{\Omega}\right] = \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_G\dot{\boldsymbol{\Omega}} = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \text{cte} \tag{3}$$

La proyección de $\boldsymbol{\Omega}$ sobre la dirección fija de $\boldsymbol{H}_G$ es constante:

$$\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{H}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_G\boldsymbol{\Omega} = \frac{2T}{H} \quad \text{(cte)} \tag{4}$$

En el caso en que el sólido sea de revolución, el eje del cuerpo describe un cono circular alrededor de la dirección invariante del momento cinético (nutación θ constante). El movimiento de precesión de dicho eje tiene velocidad $\dot{\psi}$ constante, con velocidad de rotación propia ($\dot{\varphi}$) asimismo constante.

Aplicación. Llamando $\boldsymbol{k}$ al versor de dirección del eje de revolución e $\boldsymbol{i}$ al versor ortogonal a $\boldsymbol{k}$ contenido en el plano definido por $\boldsymbol{\Omega}$ y $\boldsymbol{k}$, se tiene: $\boldsymbol{\Omega} = \Omega(\operatorname{sen}\alpha\boldsymbol{i} + \cos\alpha\boldsymbol{k})$. Los momentos de inercia en G según las direcciones $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{k}$ son, respectivamente, $A = 5/2mR^2$ y $C = mR^2$. Las expresiones pedidas son:

$$\boldsymbol{H}_G = mR^2\Omega(\frac{5}{2}\operatorname{sen}\alpha\boldsymbol{i} + \cos\alpha\boldsymbol{k}) \tag{5}$$

$$\boldsymbol{T}_G = \frac{1}{2}mR^2\Omega^2(\frac{5}{2}\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) \tag{6}$$

$$\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{\Omega} = \frac{\Omega(5\operatorname{sen}^2\alpha + 2\cos^2\alpha)}{\sqrt{25\operatorname{sen}^2\alpha + 4\cos^2\alpha}} \tag{7}$$

Expresar el tensor de inercia de un sólido rígido respecto de un punto O empleando tanto una notación tensorial como la de sus coordenadas en un sistema cartesiano. *Justificar* que es simétrico, definido positivo y que sus autovalores son positivos. *Deducir* la expresión que permite calcular el momento de inercia del sólido respecto de cualquier recta que pase por O. APLICACIÓN: *Obtener* el momento de inercia de un rectángulo homogéneo de lados a y b en su centro G respecto de una diagonal. (5 ptos.)

En notación tensorial, el tensor de inercia se expresa de manera explícita mediante:

$$\boldsymbol{I}_O = \int_{\mathcal{B}} (r^2 \mathbf{1} - \boldsymbol{r} \otimes \boldsymbol{r}) \rho dV \tag{8}$$

donde $\mathbf{1}$ es el tensor identidad, de componentes δ_{ij} (deltas de Kronecker) en una base ortonormal, y ($\otimes$) indica producto tensorial o diádico. Sus componentes en un sistema cartesiano se obtienen sustituyendo $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ en (8), resultando:

$$\boldsymbol{I}_O = \begin{pmatrix} \int_{\mathcal{B}}(y^2+z^2)\rho dV & -\int_{\mathcal{B}} xy\rho dV & -\int_{\mathcal{B}} xz\rho dV \\ -\int_{\mathcal{B}} yx\rho dV & \int_{\mathcal{B}}(x^2+z^2)\rho dV & -\int_{\mathcal{B}} yz\rho dV \\ -\int_{\mathcal{B}} zx\rho dV & -\int_{\mathcal{B}} yz\rho dV & \int_{\mathcal{B}}(x^2+y^2)\rho dV \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_{yy} & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \tag{9}$$

De la expresión de las componentes de $\boldsymbol{I}_O$ en (9) es inmediato comprobar que es simétrico. La expresión:

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{I}_O \boldsymbol{\Omega} \tag{10}$$

caracteriza la energía cinética como una forma cuadrática de $\boldsymbol{\Omega}$ definida por $\boldsymbol{I}_O$. La energía cinética, por su propia definición, es positiva para cualquier movimiento de rotación no nulo ($\boldsymbol{\Omega} \neq \mathbf{0}$), lo que caracteriza al tensor $\boldsymbol{I}_O$ como definido positivo. Por ser $\boldsymbol{I}_O$ simétrico sus autovalores son reales, y como además es definido positivo sus autovalores serán positivos.

Sea $\boldsymbol{u}$ el versor de dirección de una recta que pasa por O. La distancia a ésta de un punto cualquiera $P \in \mathcal{B}$ definido por $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP}$ es $d = \mid \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{r} \mid$. A partir de la definición de momento de inercia:

$$I_u = \int_{\mathcal{B}} d^2 \rho dV = \int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{r})\rho dV = \boldsymbol{u}\cdot\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{r}\wedge(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{r})\rho dV = \boldsymbol{u}\cdot\int_{\mathcal{B}} [r^2\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{r}]\rho dV = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{I}_O\boldsymbol{u} \tag{11}$$

Aplicación. El tensor de inercia de un rectángulo en G respecto de unos ejes Gx (paralelo al lado a), Gy (paralelo al lado b) y Gz perpendicular al plano del rectángulo es:

$$\boldsymbol{I}_G = \frac{1}{12} m \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

El versor de dirección de una diagonal en los ejes en que se ha calculado $\boldsymbol{I}_G$ es:

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}) \tag{13}$$

Sustituyendo (12) y (13) en (11) resulta:

$$I_u = \frac{1}{6}\frac{ma^2b^2}{a^2+b^2} \tag{14}$$