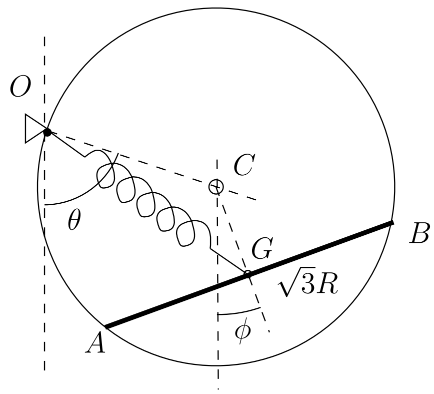
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (22 de junio del 2007)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

El sistema material de la figura, contenido en un plano vertical, está formado por un aro homogéneo de masa m y radio R, y por una varilla homogénea AB de longitud $\sqrt{3}R$ y masa $8m$. El aro puede girar libremente respecto de un punto fijo O, mientras que la varilla puede deslizar sin rozamiento sobre el aro. El centro de gravedad G de la varilla se une al punto O mediante un muelle de longitud natural nula y constante $k = 2mg/R$.



Se pide:

1. Comprobar que existe una posición de equilibrio estable del sistema en $\theta = \phi = 0$ para el valor de k dado.
2. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable, calculando las matrices de masas y rigideces del sistema.
3. Calcular las frecuencias propias y los modos normales de vibración correspondientes.

1.— Para estudiar el equilibrio desarrollamos la expresión del potencial, debido al peso de los cuerpos y a la acción del resorte:

$$\begin{aligned} V &= mgy_C + 8mgy_G + \frac{1}{2}k|OG|^2 \\ &= -9mgR\cos\theta - 4mgR\cos\phi + \frac{1}{2}kR^2\left(\frac{5}{4} + \cos(\theta-\phi)\right) . \end{aligned} \tag{1}$$

La derivada respecto a las coordenadas $\{\theta, \phi\}$ es

$$\left\{\frac{\partial V}{\partial q_i}\right\} = \begin{Bmatrix} 9mgR\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{1}{2}kR^2\,\mathrm{sen}(\theta-\phi) \\ 4mgR\,\mathrm{sen}\,\phi + \frac{1}{2}kR^2\,\mathrm{sen}(\theta-\phi) \end{Bmatrix} , \tag{2}$$

siendo inmediato comprobar que se anula para $(\theta, \phi) = (0, 0)$, por lo que la posición es de equlibrio. La derivada segunda, particularizada para esta posición, es

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right]_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 9mgR - \frac{1}{2}kR^2 & \frac{1}{2}kR^2 \\ \frac{1}{2}kR^2 & 4mgR - \frac{1}{2}kR^2 \end{pmatrix} . \tag{3}$$

El equilibrio será estable si esta matriz es definida positiva, para lo que las condiciones son que los menores principales sean positivos:

$$k < 18\frac{mg}{R}; \quad k < \frac{72}{13}\frac{mg}{R} , \tag{4}$$

siendo esta última la más restrictiva de las dos. El valor del enunciado $k = 2mg/R < (72/13)mg/R$ cumple la condición, por lo que el equilibrio será estable.

2.— Las ecuaciones diferenciales linealizadas para pequeñas oscilaciones pueden escribirse en este caso en forma matricial como

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}\,, \tag{5}$$

siendo $[\mathbf{M}]$ la matriz de masas, $[\mathbf{K}]$ la matriz de rigidez y $\{\mathbf{q}\} = (\theta, \phi)^{\mathrm{T}}$ el vector de coordenadas. La expresión de las matrices se puede obtener a partir de las derivadas de las funciones de energía cinética y potencial respectivamente, particularizadas en la posición de equilibrio:

$$M_{ij} = \left.\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right|_{(0,0)} \quad ; \quad K_{ij} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{(0,0)} \,. \tag{6}$$

La energía cinética la obtendremos a partir de

$$T = \frac{1}{2} I_{O,\mathrm{aro}} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_{G,\mathrm{varilla}} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(8m) v_G^2\,; \tag{7}$$

teniendo en cuenta que

$$I_{O,\mathrm{aro}} = 2mR^2\,; \quad I_{G,\mathrm{varilla}} = 2mR^2\,; \quad v_G^2 = R^2\dot{\theta}^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 \dot{\phi}^2 + 2 \cdot R \cdot \frac{R}{2} \dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi)\,, \tag{8}$$

resulta la expresión

$$T = 5mR^2\dot{\theta}^2 + 2mR^2\dot{\phi}^2 + 4mR^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi)\,. \tag{9}$$

Derivando y particularizando T para la posición de equilibrio $(0, 0)$, y empleando las derivadas de V antes calculadas en (3) se obtiene:

$$[\mathbf{M}] = mR^2 \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad [\mathbf{K}] = mgR \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \,. \tag{10}$$

3.— Las frecuencias propias se obtienen a partir de la ecuación característica del problema de autovalores generalizado definido por $[\mathbf{K}]$ y $[\mathbf{M}]$:

$$([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}])\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{0}\} \quad \Rightarrow \quad \det([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}]) = 0\,, \tag{11}$$

que resulta en el *polinomio característico*, cuyas soluciones son los autovalores:

$$24\lambda^2 - 54\frac{g}{R}\lambda + 23\left(\frac{g}{R}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{g}{R}\frac{27 \pm \sqrt{177}}{24}\,. \tag{12}$$

Las *frecuencias propias* son las raíces cuadradas de estos autovalores:

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{27 + \sqrt{177}}{6} \cdot \frac{g}{R}} = 1{,}2959\sqrt{\frac{g}{R}}\,; \quad \omega_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{27 - \sqrt{177}}{6} \cdot \frac{g}{R}} = 0{,}7554\sqrt{\frac{g}{R}}\,. \tag{13}$$

Sustituyendo cada uno de los autovalores obtenidos en (12) en la ecuación $(11)_1$ se obtienen los vectores propios asociados o *modos normales de vibración*:

$$\{\mathbf{a}\}_1 = \begin{Bmatrix} -\frac{1-4\lambda_1}{8-10\lambda_1} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0{,}6502 \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad \{\mathbf{a}\}_2 = \begin{Bmatrix} -\frac{1-4\lambda_2}{8-10\lambda_2} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}5593 \\ 1 \end{Bmatrix}\,. \tag{14}$$