Mecánica

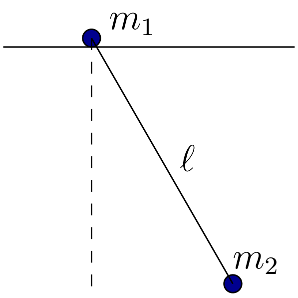
EXAMEN FINAL ORDINARIO (22 de junio del 2007)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 5/45) Tiempo: 25 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Se considera un sistema holónomo con coordenadas generalizadas $\{q_i,\ i = 1,\dots n\}$ libres. En dicho sistema se encuentra definida la función lagrangiana $L(q_i, \dot{q}_i, t)$. *Indicar* bajo qué condiciones existen integrales primeras del movimiento, *deduciendo* las magnitudes que se conservan en cada caso. *Aplicación:* El sistema de la figura está formado por dos masas pesadas $\{m_1, m_2\}$ unidas por una varilla rígida sin masa de longitud ℓ, dentro de un plano vertical fijo. La masa m_1 desliza libremente sobre una recta horizontal. Obtener las integrales primeras. (5 ptos.)



Denotando por T a la energía cinética y si las fuerzas aplicadas derivan de un potencial V se define la función Lagrangiana como $L(q_i, \dot{q}_i, t) \stackrel{\text{def}}{=} T - V$, y las correspondientes ecuaciones del movimiento se expresan como:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, ..., n) \tag{1}$$

Con las ecuaciones de Lagrange expresadas de esta forma, las posibles integrales primeras son:

- *Coordenadas cíclicas.* Si la función Lagrangiana L no depende explícitamente de una coordenada q_i - es decir, $\partial L/\partial q_i = 0$ -, se verifica la conservación del momento generalizado correspondiente p_i. Se dice entonces que q_i es una coordenada cíclica.

$$\text{si} \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \rightarrow \quad p_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = cte.$$

- *Integral de Jacobi o de la energía.* La derivada total de L respecto del tiempo es:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right] + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\text{por tanto, si} \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad h \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = cte.$$

  Si además la energía cinética es una expresión cuadrática homogénea en $\dot{q}_i$, se puede comprobar que $h = T + V$, y por tanto la energía total se conserva.

En la aplicación, la única fuerza aplicada es el peso, que deriva de un potencial. Tomando como coordenadas generalizadas el desplazamiento x de la partícula m_1 y el ángulo θ que forma la varilla con la vertical descendente, la función Lagrangiana tiene la expresión:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) + m_2 g\ell\cos\theta$$

y las ecuaciones del movimiento se obtienen mediante las ecuaciones de Lagrange dadas en la forma (1).

Se observa que x es una coordenada cíclica, puesto que $\partial L/\partial x = 0$, y por tanto se conserva su correspondiente momento generalizado:

$$p_x = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 \ell \dot{\theta} \cos\theta = cte.$$

que representa en este caso la conservación de la componente horizontal de la cantidad de movimiento del sistema completo.

Por otro lado se observa que $\partial L/\partial t = 0$ y que además la energía cinética es una expresión cuadrática homogénea en $\dot{x}$ y $\dot{\theta}$, por lo que la energía total del sistema se conserva:

$$E = T + V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\ell^2 \dot{\theta}^2 + 2\ell \dot{x} \dot{\theta} \cos\theta \right) - m_2 g \ell \cos\theta = cte.$$

Este resultado era esperable, puesto que la única fuerza que trabaja considerando el sistema completo es el peso, que deriva de un potencial estacionario, y por tanto es conservativa.