ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS (MADRID)

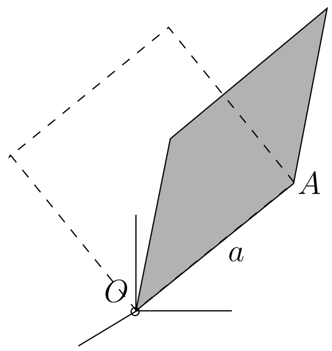
Mecánica

EXAMEN FINAL ORDINARIO (22 de junio de 2007)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Una placa cuadrada homogénea pesada de lado a y masa m se mueve de forma que uno de sus vértices O es fijo, y otro adyacente A está obligado a moverse en un plano vertical fijo y liso que contiene también a O. Se supone que este plano vertical no introduce restricciones adicionales que puedan entorpecer el movimiento de la placa.



Se pide:

1. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento;
2. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento en función de los grados de libertad y sus derivadas;

⋆

1. El sistema tiene dos grados de libertad, que podemos representar mediante el ángulo θ que forma la arista OA con la vertical ascendente, y el giro φ de la placa alrededor de dicha arista OA.

La única integral primera del movimiento es la conservación de la energía total, puesto que la única fuerza que trabaja es el peso, que es conservativa. Nótese que el punto A está obligado a moverse en un plano liso, por lo que la reacción es perpendicular a éste y por tanto no trabaja.

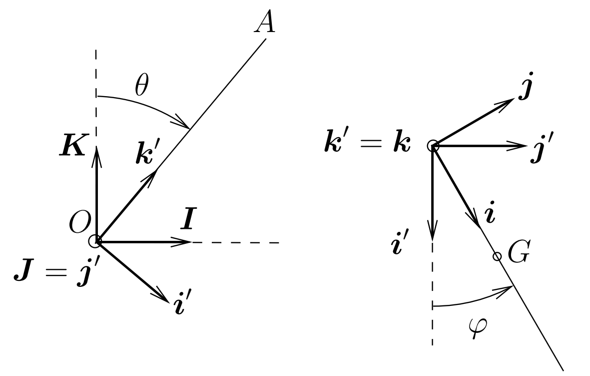


Figura 1: *Definición los grados de libertad y del sistema móvil auxiliar*

2. Por conveniencia se definen tres sistemas de referencia auxiliares (ver Figura 1): un sistema fijo $(O; \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K})$; un sistema móvil $(O; \boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}')$ que acompaña a la arista OA en su giro alrededor del versor $\boldsymbol{J}$; por último un sistema $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ ligado a la placa, que recoge el giro φ alrededor del versor $\boldsymbol{k}'$.

La conservación de la energía proporciona una primera ecuación del movimiento. Dado que la placa tiene un punto fijo, la energía cinética puede calcularse mediante la expresión

$$T = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) \tag{1}$$

El tensor de inercia $\boldsymbol{I}_O$ expresado en el sistema del cuerpo $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ puede obtenerse a partir del tensor central de inercia y de la expresión del campo tensorial de inercia $\boldsymbol{I}_O =$

$\boldsymbol{I}_G + m\,(OG^2\mathbf{1} - \boldsymbol{OG} \otimes \boldsymbol{OG})$. Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{OG} = (a/2)(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{i})$, resulta:

$$\boldsymbol{I}_O = ma^2 \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -1/4 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Por otro lado, la velocidad de rotación se expresa como $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{J} + \dot{\varphi}\boldsymbol{k}$. Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{j}' = \operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j}$, resulta:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{i} + \dot{\theta}\cos\varphi\boldsymbol{j} + \dot{\varphi}\boldsymbol{k} \tag{3}$$

Combinando (1), (2) y (3) y después de algunas operaciones se obtiene la energía cinética de la placa:

$$T = \frac{1}{2}ma^2\left[\frac{1}{3}\dot{\theta}^2\left(1 + \cos^2\varphi\right) - \frac{1}{2}\dot{\theta}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi + \frac{1}{3}\dot{\varphi}^2\right] \tag{4}$$

La energía potencial gravitatoria, tomando como nivel de referencia el plano horizontal que pasa por O, se obtiene mediante la expresión:

$$V = mg(\boldsymbol{OG} \cdot \boldsymbol{K}) \tag{5}$$

Si se desea emplear la expresión obtenida anteriormente $\boldsymbol{OG} = (a/2)(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{i})$, es necesario proyectar el versor $\boldsymbol{K}$ fijo en el sistema del cuerpo. Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{K} = \cos\theta\boldsymbol{k} - \operatorname{sen}\theta\boldsymbol{i}'$ y que $\boldsymbol{i}' = \cos\varphi\boldsymbol{i} - \operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{j}$, se obtiene finalmente $\boldsymbol{K} = -\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k}$, resultando:

$$V = mg\frac{a}{2}\left(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\right) \tag{6}$$

La primera ecuación del movimiento se obtiene sumando la energía cinética T dada por (4) y la potencial dada por (6) e igualar a una constante a determinar por las condiciones iniciales.

La segunda ecuación puede obtenerse mediante las ecuaciones de Lagrange, a partir de la función Lagrangiana que se obtiene restando (6) de (4); concretamente, la ecuación correspondiente a θ resulta:

$$\frac{1}{3}ma^2\left[\ddot{\theta}(1 + \cos^2\varphi) - \dot{\theta}\dot{\varphi}\operatorname{sen}2\varphi\right] - \frac{1}{4}ma^2\left[\ddot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right] - mg\frac{a}{2}(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta\cos\varphi) = 0$$